Minimización de funcionales

D. González–Sánchez*

Escuela de verano 2024

Departamento de Matemáticas, CINVESTAV

23 de julio de 2024

*Investigador por México, Conahcyt–Cinvestav

Contenido

1. El problema de la braquistócrona

En 1696, Johann Bernoulli publica el siguiente problema

Problema novum ad cujus solutionem Mathematici invitantur

Datis in plano verticali duobus punctis A & B assignare Mobili M, viam AMB, per quam gravitate sua descendens & moveri incipiens a puncto A, brevissimo tempore perveniat ad alterum punctum B. (Acta Eruditorum, 1696)

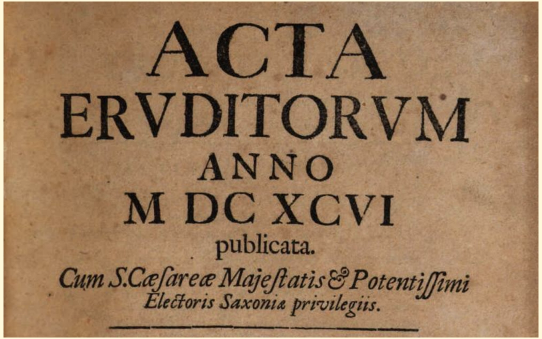
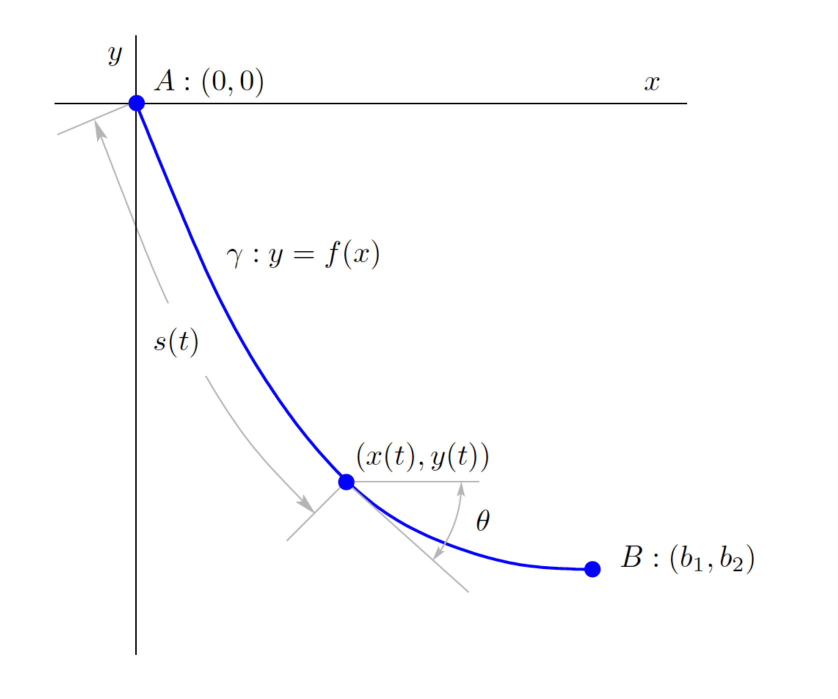


Imagen tomada de Google Books

Home Page
Title Page
Go Back
Full Screen
Close
Quit

El tobogán de Johann Bernoulli (Shafer [10])



Groningen,
January 1, 1697

AN ANNOUNCEMENT

"I, Johann Bernoulli, greet the most clever mathematicians in the world. Nothing is more attractive to intelligent people than an honest, challenging problem whose possible solution will bestow fame and remain as a lasting monument.

"... I hope to earn the gratitude of the entire scientific community by placing before the finest mathematicians of our time a problem which will test their methods and the strength of their intellect. If someone communicates to me the solution of the proposed problem, I shall then publicly declare him worthy of praise."

Shafer [10, pp. 2–3] menciona

> “Of course Bernoulli had a solution to the problem in hand when he posed it, else he would not have publicly challenged others to work on it! The challenge was taken up by Johann Bernoulli’s older brother Jakob Bernoulli [1654-1705], and by Gottfried Leibniz [1646-1716], Guillaume de L’Hôpital [1661-1704], and Isaac Newton [1642-1727],... ”

Siguiendo a Shafer [10], la distancia $s(t)$ recorrida después de t segundos es

$$s(t) = \int_0^{x(t)} \sqrt{1 + [f'(\xi)]^2} d\xi, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Por la Ley de conservación de la energía,

$$\frac{1}{2} m[s'(t)]^2 + mgf(x(t)) \equiv 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Entonces

$$\sqrt{-2gf(x(t))} = \sqrt{1 + [f'(x(t))]^2} \cdot x'(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

de donde

$$T = \int_0^T \sqrt{\frac{1 + [f'(x(t))]^2}{-2gf(x(t))}} \cdot x'(t)dt.$$

Usando el teorema de cambio de variable, el *tiempo de recorrido* es

$$T(f) := \int_0^{b_1} \sqrt{\frac{1 + [f'(x)]^2}{-2gf(x)}} dx, \qquad f(0) = 0, \; f(b_1) = b_2,$$

para cualquier función f continuamente diferenciable.

2. Cálculo de variaciones

El problema más simple del cálculo de variaciones

Encontrar $x : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$, de clase C^1, que minimice

$$J[x] := \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t))dt, \qquad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1. \tag{2.1}$$

¿Cómo minimizamos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, usando cálculo diferencial?

Supongamos que $J[x] \leq J[z]$ para cualquier z de clase C^1 tal que

$$z(t_0) = x_0, \quad z(t_1) = x_1.$$

Consideremos $z : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ de la forma

$$z(t) = x(t) + \lambda y(t), \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \quad y(t_0) = y(t_1) = 0.$$

Si y está fija, sea

$$f(\lambda) := J[x + \lambda y], \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Entonces $f(0) \leq f(\lambda)$ para cualquier λ y, bajo las hipótesis *apropiadas*,

$$\frac{df}{d\lambda}(0) = 0.$$

Notemos lo siguiente

$$\frac{d}{d\lambda}\int_{t_0}^{t_1} L(t, x+\lambda y, x'+\lambda y')dt = \int_{t_0}^{t_1}\Big[D_2L(t, x+\lambda y, x'+\lambda y')\cdot y + D_3L(t, x+\lambda y, x'+\lambda y')\cdot y'\Big]dt$$

siempre que la derivada y la integral puedan intercambiarse. Usando integración por partes,

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1} D_3L(\cdot)y' &= D_3L(\cdot)y\Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} y\Big[\frac{d}{dt}D_3L(\cdot)\Big]\\ &= -\int_{t_0}^{t_1}\Big[\frac{d}{dt}D_3L(\cdot)\Big]y.\end{aligned}$$

Entonces, para cada función y de clase C^1 que satisface $y(t_0) = y(t_1) = 0$,

$$\begin{aligned}\frac{df}{d\lambda}(0) &= \int_{t_0}^{t_1}\Big[D_2L(t, x, x')\cdot y - \frac{d}{dt}D_3L(t, x, x')\cdot y\Big]dt\\ &= \int_{t_0}^{t_1}\Big[D_2L(t, x, x') - \frac{d}{dt}D_3L(t, x, x')\Big]y\,dt\\ &= 0.\end{aligned}$$

Teorema 1 (Ecuación de Euler-Lagrange). *Suponga que L es de clase C^1. Si x minimiza* (2.1), *entonces satisface*

$$D_2L(t, x(t), x'(t)) - \frac{d}{dt}D_3L(t, x(t), x'(t)) = 0 \qquad t_0 \le t \le t_1. \tag{2.2}$$

Lema 1 (El lema fundamental [1]). *Sea $F : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ continua. Si*

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t)y(t)\,dt = 0$$

para toda función y de clase C^1 tal que $y(t_0) = y(t_1) = 0$, entonces $F(t) \equiv 0$.

Observación 1. La ecuación de Euler-Lagrange es una *condición necesaria*. Se pueden dar condiciones *suficientes* al pedir algún tipo de convexidad en L.

Observación 2. La ecuación (2.2) fue descubierta por Euler a partir de ideas geométricas . Lagrange obtuvo la misma ecuación a través de métodos analíticos. El nombre *cálculo de variaciones* fue propuesto por Euler después de conocer el trabajo de Lagrange. (Capítulos 3 y 4 en Goldstine [7])

A la izquierda, estampilla conmemorativa de L. Euler; a la derecha, monumento de J.L. Lagrange.

El problema de la . . .
Cálculo de variaciones
Otras clases de . . .
Comentarios finales
Home Page
Title Page
Page 12 of 26
Go Back
Full Screen
Close
Quit

Si volvemos al tiempo de recorrido,

$$T(f) := \int_0^{b_1} \sqrt{\frac{1+[f'(x)]^2}{-2gf(x)}}dx, \qquad f(0)=0,\ f(b_1)=b_2,$$

la ecuación de Euler–Lagrange toma la forma

$$f(x)\left(1+[f'(x)]^2\right)=c, \qquad f(0)=0,\ f(b_1)=b_2.$$

La solución f de esta ecuación diferencial ordinaria está dada en forma paramétrica

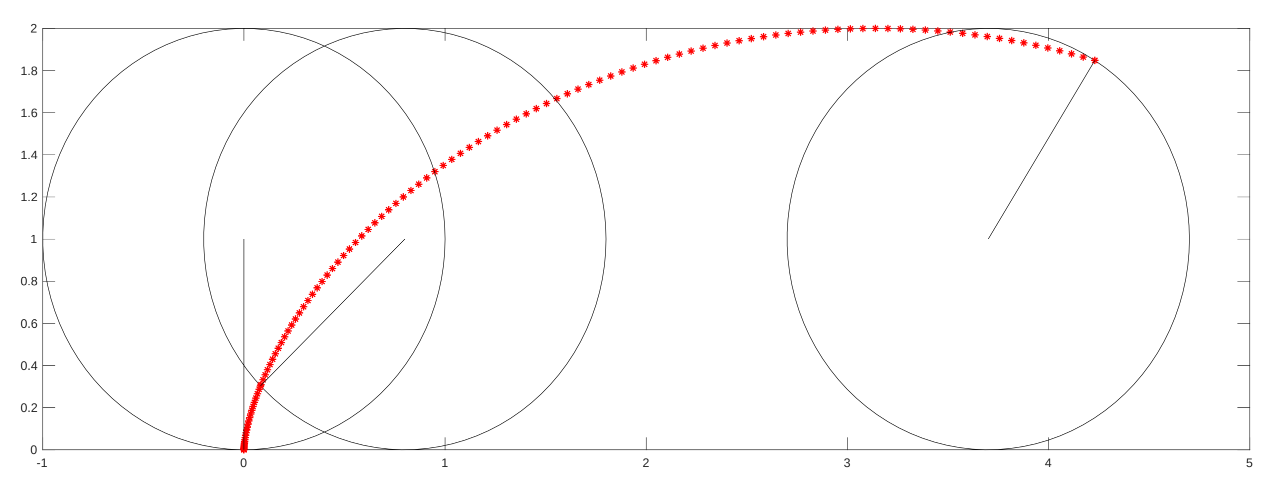
$$\begin{aligned} x(\alpha) &= R(\alpha-\sin\alpha) \\ y(\alpha) &= -R(1-\cos\alpha), \qquad 0\le\alpha\le\alpha_1 \end{aligned}$$

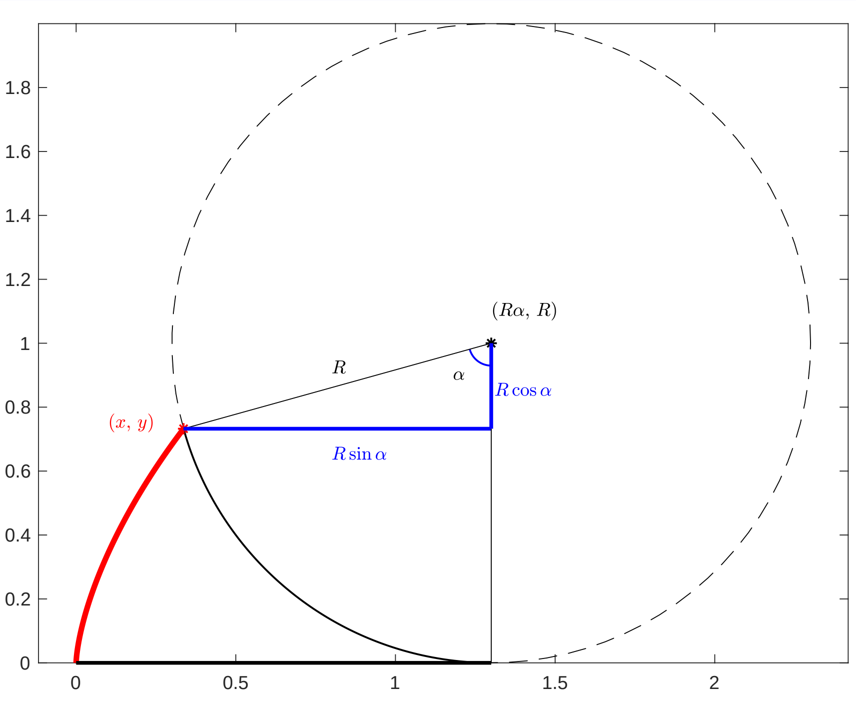
donde α_1 es la única solución en el intervalo $(0,2\pi)$ de

$$\frac{\alpha-\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=-\frac{b_1}{b_2}$$

y $R=-b_2/(1-\cos\alpha_1)$. Para mayores detalles, ver Shafer [10].

La cicloide





La ecuación de la cicloide se obtiene al observar que $x + R\sin\alpha = R\alpha$, $y + R\cos\alpha = R$.

La investigación sobre el cálculo de variaciones continuó con Legendre, Jacobi, Hamilton, Weierstrass, Mayer, Hilbert, Bolza, Carathéodory, entre otros (Goldstine [7]).

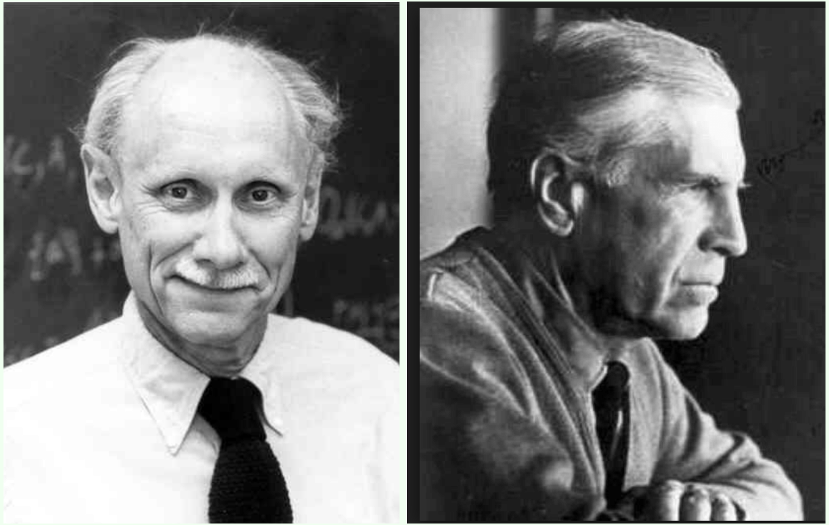
Observación 3. A inicios del siglo XX, Oskar Bolza muestra que el funcional

$$\int_{-1}^{1} t^2 \dot{x}^2(t)dt, \qquad x(-1) = a, \quad x(1) = b,$$

con $a \neq b$, no alcanza su mínimo.

Resultados de existencia, para este y otros tipos de problemas, pueden encontrarse en Cesari [4].

3. Otras clases de funcionales



A la izquierda, Richard Bellman; a la derecha, Lev Pontryagin.

En 1950's, R. Bellman estudiaba *procesos de asignación multi-etapa*, para resolver esta clase de problemas propuso la **programación dinámica** (ver Bellman [3]).

Consideremos el *sistema controlado*

$$x_{t+1} = F(t, x_t, u_t), \quad t = 0, 1, 2, \ldots, T-1 \tag{3.1}$$

donde $F(t, \cdot, \cdot) : X \times U \to X$. Se quiere minimizar

$$\sum_{t=0}^{T-1} c(t, x_t, u_t) + C(T, x_T) \tag{3.2}$$

Algoritmo de programación dinámica

$$V_T(x) := C(T, x), \quad x \in X,$$

$$V_t(x) := \min_{u \in U} \{c(t, x, u) + V_{t+1}(F(t, x, u))\}, \quad x \in X, \quad t = T-1, \ldots, 0. \tag{3.3}$$

Si para cada t, $\hat{u}_t(x)$ minimiza el lado derecho de (3.3), entonces la sucesión (finita)

$$\hat{u}_0(x), \hat{u}_1(x), \ldots, \hat{u}_{T-1}(x), \quad x \in X,$$

minimiza (3.2) sujeto a (3.1). Ver Hernández-Lerma et al. [8].

Por otro lado, también en la década de 1950's, L. S. Pontryagin y sus colaboradores empezaron a desarrollar la Teoría matemática de procesos óptimos (Pontryagin et al. [9]).

Encontrar funciones u y x que satisfacen

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0, \qquad 0 \leq t \leq T, \tag{3.4}$$

y minimicen

$$\int_0^T c(t, x(t), u(t))dt + C(T, x(T)). \tag{3.5}$$

Asociado a este problema, se define el Hamiltoniano

$$\mathcal{H}(t, x, u, \lambda) := c(t, x, u) + \lambda \cdot f(t, x, u).$$

Principio del mínimo

Supongamos que $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ es una solución del problema (3.4)–(3.5). Entonces existe una función $\lambda(\cdot)$ que satisface la **ecuación adjunta**

$$-\dot{\lambda}(t) = D_2\mathcal{H}(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t)), \qquad \lambda(T) = D_2C(T, x^*(T)), \tag{3.6}$$

y la **minimización del Hamiltoniano**

$$\mathcal{H}(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t)) = \min_u\{\mathcal{H}(t, x^*(t), u, \lambda(t))\}. \tag{3.7}$$

Observación 4. En el Principio del mínimo se tienen *condiciones necesarias*. Como en el cálculo de variaciones, también se pueden dar condiciones *suficientes*.

La demostración original del Principio del mínimo es larga. En 1974, Ekeland [6] da una demostración más corta.

La ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman

Reconsideremos el problema (3.4)–(3.5). Sea

$$V(s,y) := \inf_{(x,u)} \left[\int_s^T c(t,x,u)dt + C(T,x(T)) \right]$$

donde el par (x,u) satisface

$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad x(s) = y, \qquad s \leq t \leq T.$$

Bajo hipótesis apropiadas, la función V satisface

$$V_t(t,x) + \inf_u [c(t,x,u) + V_x(t,x) \cdot f(t,x,u)] = 0 \qquad \forall (t,x),$$

con $V(T,x) = C(T,x)$.

Más aún, si el ínfimo se alcanza en $u^*(t,x)$, entonces u^* define una política óptima. Ver Hernández-Lerma et al. [8].

4. Comentarios finales

Conclusiones

- Problemas de optimización
  dimensión infinita
  intuición puede fallar
- Cálculo de variaciones
- Programación dinámica
- Principio del máximo

El regreso de la braquistócrona

Coleman [5] observa que el tiempo de recorrido involucra una integral impropia, desarrolla una solución detallada a través del cálculo de variaciones.

Balder [2] presenta un enfoque directo para verificar que la cicloide es la única solución global.

References

[1] V. M. Alekseev, V. M. Tikhomirov, and S. V. Fomin. *Optimal control*. Contemporary Soviet Mathematics. Springer Science, New York, 1987. Translated from the Russian by V. M. Volosov.

[2] E. Balder. The brachistochrone problem made elementary. */www.staff.science.uu.nl/~balde101/talks/vanbeek.pdf*, 2002.

[3] R. Bellman. On the theory of dynamic programming. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 38:716–719, 1952.

[4] L. Cesari. *Optimization—theory and applications*. Springer-Verlag, New York, 1983.

[5] R. Coleman. A detailed analysis of the brachistochrone problem. *https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00446767v2*, 2012.

[6] I. Ekeland. On the variational principle. *J. Math. Anal. Appl.*, 47:324–353, 1974.

[7] H. H. Goldstine. *A history of the calculus of variations from the 17th through the 19th century*, volume 5 of *Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980.

[8] O. Hernández-Lerma, L. R. Laura-Guarachi, S. Mendoza-Palacios, and D. González-Sánchez. *An Introduction to Optimal Control Theory*. Springer International Publishing, 2023.

[9] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mishchenko. *The mathematical theory of optimal processes*. The Macmillan Company, New York, 1964. Translated by D. E. Brown.

[10] D. S. Shafer. The brachistochrone: historical gateway to the calculus of variations. *Materials matemàtics*, pages 0001–14, 2007.