INTRODUCCION A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCASTICAS

Onésimo Hernández-Lerma

Departamento de Matemáticas

CINVESTAV-IPN

México D.F.

Resumen

Una ecuación diferencial estocástica (EDE) es de la forma:

dx_t = "parte determinística" + "parte estocástica"

$$= F(x_t)dt + G(x_t)dW_t ,$$

donde W_t es un *movimiento browniano* – también conocido como *proceso de Wiener*. (Los coeficientes pueden depender del tiempo t: $F(t, x_t)$, $G(t, x_t)$.) En esta plática se describe brevemente *por qué* y *cómo* surgieron las EDEs y se discuten algunas de sus propiedades.

Programa:

- Glosario de términos
- Introducción histórica
- La integral de Ito
- EDEs

Glosario

- **aleatorio** (del latin “aleatorium”)
  ≡ **estocástico** (del griego “stochos”)

- Un **fenómeno aleatorio** (≡ fenómeno estocástico) es un fenómeno cuyos resultados **no** se pueden predecir, aunque sí se conoce el conjunto Ω de los posibles resultados.

Ejemplo 1 (fenómeno aleatorio):

El fenómeno consiste en el "movimiento de una partícula", durante el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq T$. No se sabe cuál es la trayectoria de la partícula, pero sí se sabe que es una función continua en el intervalo $[0,T]$, es decir

$$\Omega = C[0,T].$$

- Una **variable aleatoria** es un cierto tipo de función $X: \Omega \longrightarrow IR$ ó IR^n.

- Un **proceso estocástico** es una colección de variables aleatorias.

Ejemplo 2 (Proceso estocástico)

En el Ejemplo 1, sea $\{X_t,\ 0 \leq t \leq T\}$ la colección de variables aleatorias

$$X_t : \Omega \longrightarrow IR^3$$

definidas para cada trayectoria $\omega \in \Omega = C[0, T]$ como

$X_t(\omega)$ = posición de la partícula en el tiempo t dado que sigue la trayectoria ω

Introducción Histórica

Hasta fines del siglo 19 el modelo más común de un sistema dinámico era una ecuación diferencial **ordinaria**

$$\dot{x}_t = F(x_t) \quad t \geq 0,\ x_0 = x. \qquad (1)$$

Bajo ciertas hipótesis, esta EDO tiene una solución única:

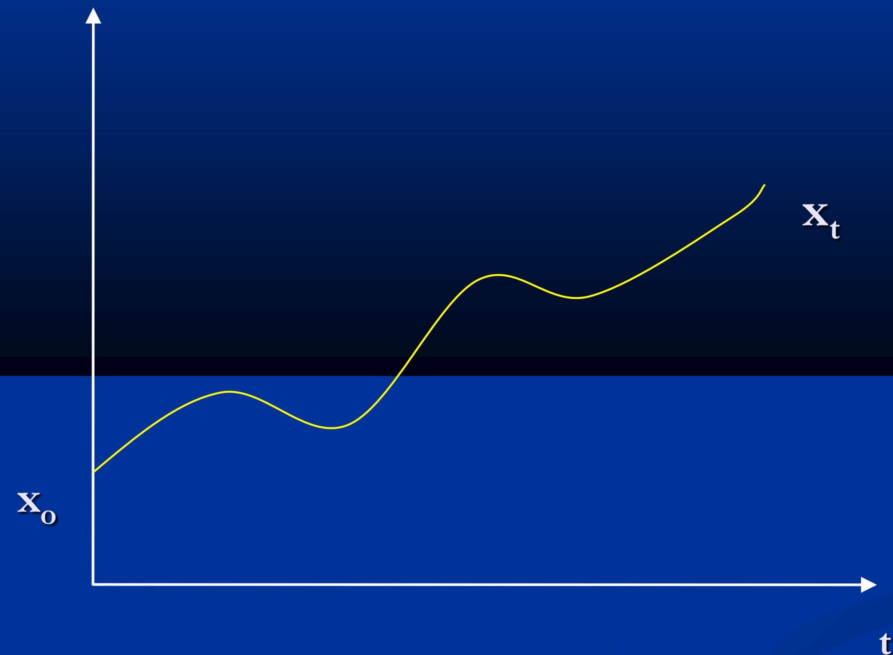


Figura 1

Sin embargo, suponiendo que (1) representaba un sistema "real", frecuentemente ocurría que las *observaciones* del sistema no coincidían con la solución teórica x_t.

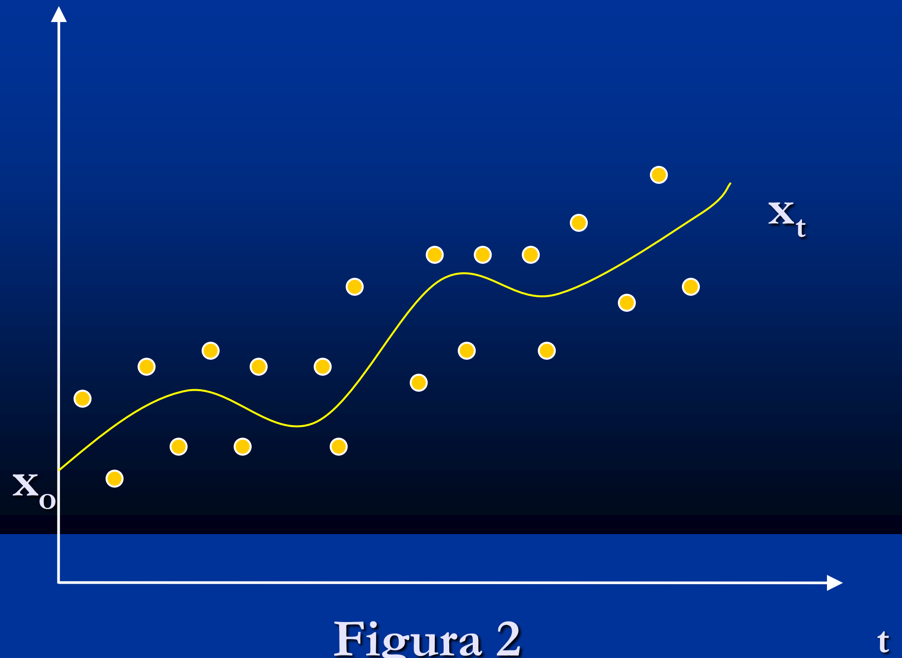


Figura 2

¿Cuál es la explicación?

Era bien sabido --- al menos desde tiempos de Galileo --- que las observaciones de un fenómeno de cualquier tipo, siempre tienen **errores**, ya sea errores humanos, errores instrumentales, errores debido al sistema de medición, etc.

Sin embargo, aún en experimentos muy bien controlados (para tratar de minimizar los errores de observación) se apreciaban discrepancias entre las *mediciones* del fenómeno de interés y el *modelo teórico* x_t del fenómeno (Figura 2)

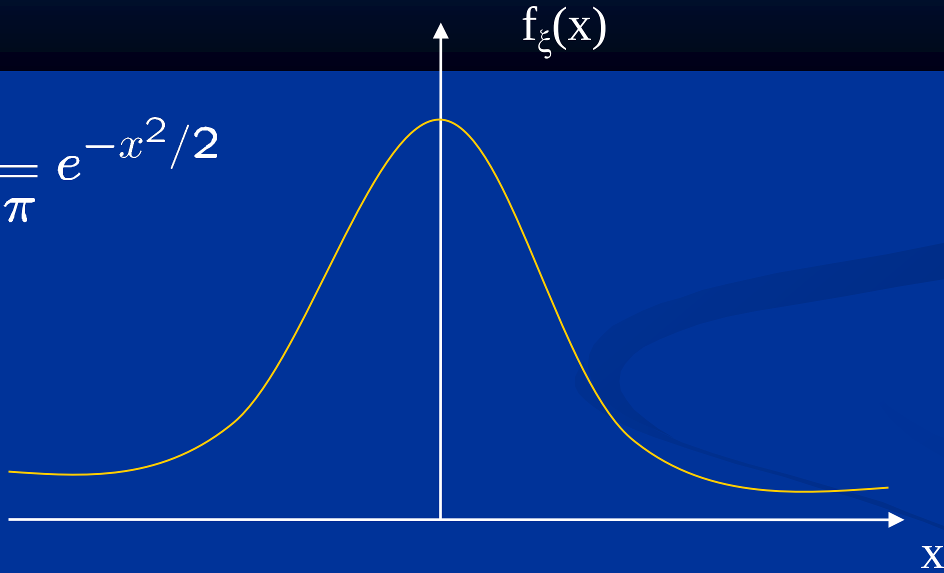
Para incorporar posibles "perturbaciones aleatorias" en el sistema, en algunas áreas (e.g. en física y astronomía) se propuso reescribir la ecuación (1) en la forma

$$\dot{x}_t = F(x_t) + G(x_t)\xi_t, \quad t \geq 0, \; x_0 = x \qquad (2)$$

en donde $\{\xi_t, \, t \geq 0\}$ era un **ruido blanco gaussiano**, es decir, un proceso estocástico tal que

a) ξ_t v.a. gaussiana con media cero y variancia 1, es decir, $E(\xi_t) = 0$ y $E(\xi_t^{\,2}) = 1$, de modo que tiene densidad de probabilidad

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}$$



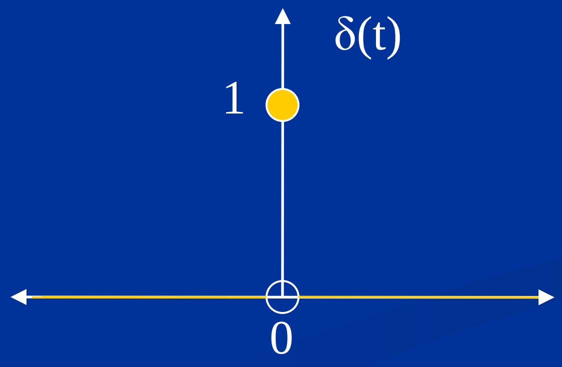
una "campana de Gauss", y

b) ξ_t y ξ_s **no** están correlacionadas si $t \neq s$; es decir, la función de covariancia

$$C(t) = E(\xi_{t+s}\,\xi_s)$$

es la “delta de Dirac”

$$C(t) \equiv \delta(t) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \neq 0, \\ 1 & \text{si} \quad t = 0. \end{cases} \qquad (3)$$



¿Por qué se llama “ruido blanco” (gaussiano)?

Por (3), la tranformada de Fourier de C(t), también llamada **densidad espectral** del proceso $\{\xi_t\}$, es **constante**:

$$h(\lambda) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} C(t)dt = \frac{1}{2\pi}, \ -\infty < \lambda < \infty. \qquad (4)$$

Es decir, el espectro del proceso $\{\xi_t\}$ es “blanco” porque *todas las frecuencias aparecen con la misma intensidad* (en analogía con la luz “blanca” que contiene de manera uniforme todas las frecuencias de luz visible).

De la ecuación (4), la función de covariancia $C(t)$ se puede recuperar mediante la transformada inversa:

$$C(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} h(\lambda) d\lambda.$$

Luego, como $C(t)=\delta(t)$, se debe tener que

$$C(0) = E(\xi_t^2) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) d\lambda = \infty.$$

Este resultado **contradice** el hecho de que la variancia es $C(0)= E(\xi_t^2)= 1$. Por lo tanto:

• El ruido blanco gaussiano ξ_t **no** existe (en el sentido "usual").

Pero si ξ_t **no** existe, entonces **¿qué sentido tiene la ecuación** (2):

$$\dot{x}_t \;=\; F(x_t) + G(x_t)\xi_t \quad \textbf{?}$$

El movimiento browniano (o proceso de Wiener)

- En 1827, **Robert Brown** (biólogo escocés) observó en su microscopio granos de polen suspendidos en agua quieta ... El fenómeno que él observó ahora se conoce como **movimiento browniano**

Una particularidad de este movimiento es que sus trayectorias son continuas pero **no diferenciables**!!!

- En 1900, **Louis Bachelier** (francés, estudiante de doctorado) volvió a "descubrir" el movimiento browniano pero ... ¡en la Bolsa de Valores de Paris! Bachelier demostró que el movimiento browniano tiene trayectorias continuas y **no** diferenciables y, además, tiene

1) incrementos independientes, es decir, dada cualquier sucesión $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$,

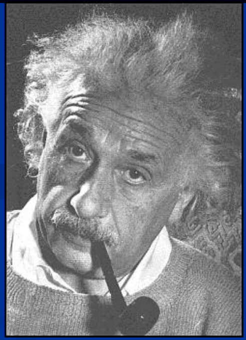
$$W(t_1)-W(t_0),\ W(t_2)-W(t_1), \ldots, W(t_n)-W(t_{n-1})$$

son variables aleatorias independientes, y

2) **incrementos estacionarios gaussianos**, es decir, para todo t, $h \geq 0$:

$$W(t+h) - W(t) \text{ tiene distribución normal } N(0,h).$$

- En 1905, el "año milagroso", **Albert Einsten** (físico suizo) descubrió (¡otra vez!) el movimiento browniano pero ... ¡en la teoría cinética del calor!



- En 1923, **Norbert Wiener** dió la primera definición "constructiva" de movimiento browniano. Por tal motivo, el movimiento browniano también es conocido como **proceso de Wiener**

- En 1908, **Paul Langevin** (físico francés) encontró que la velocidad de una partícula que se mueve como un movimiento browniano satisface la EDE

$$\dot{x}_t = -\alpha\, x_t + \sigma\, \xi_t, \quad \text{con} \quad \alpha > 0 \quad \text{y} \quad \sigma \quad \text{constantes}$$

También se encontró que si el movimiento browniano W_t fuera diferenciable (en L_2), que **no** lo es, entonces su derivada sería el ruido blanco gaussiano:

$$¡\dot{W}_t = \xi_t!$$

Por lo tanto, si escribimos $dW_t = \xi_t \; dt$,

la ecuación de Langevin se expresaría en la forma

$$\boxed{dx_t = -\alpha \; x_t \; dt \; + \; \sigma \; dW_t}$$

Más generalmente, la EDE $dx_t = F(x_t)dt + G(x_t)\xi_t$ se puede expresar en la forma

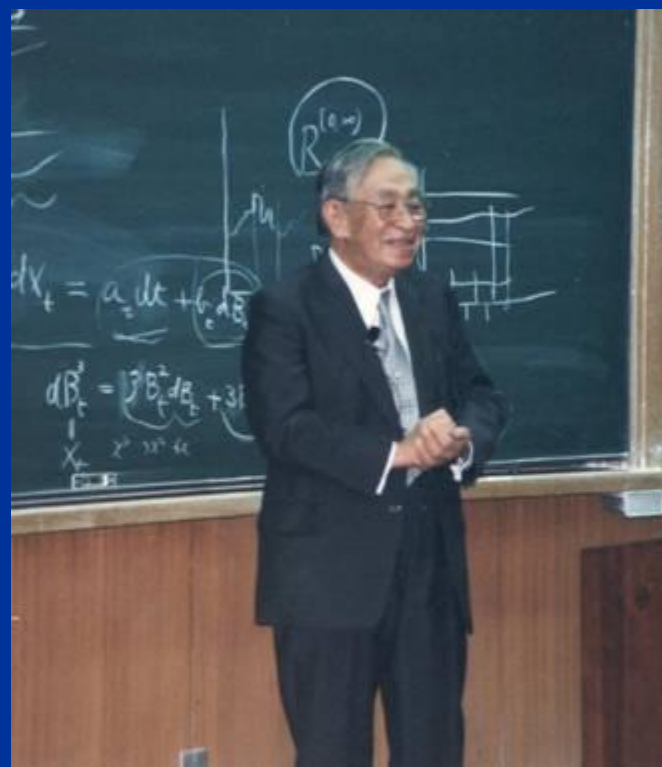
$$\boxed{dx_t = F(x_t)dt + G(x_t)dW_t} \quad t \geq 0, \; x_0 = x. \qquad (5)$$

Esta es una forma de representar la **ecuación integral**:

$$\boxed{x_t = x_0 + \int_0^t F(x_s)ds + \int_0^t G(x_s)dW_s.} \qquad (6)$$

- La primera integral en (6) se interpreta en el sentido “usual”

- ¿Cómo se interpreta la segunda integral?



La integral de Ito

En 1951, el matemático japonés **Kiyosi Ito**, definió las **integrales escocásticas**

$$\int_a^b h(t)dW(t),$$

para una cierta familia de procesos estocásticos $\{ h(t), t \geq 0\}$. Considere una partición $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ del intervalo $[a,b]$. Considere la suma "tipo Riemann-Stieltjes"

$$\sum_{i=0}^{n-1} h(t_i)[W(t_{i+1}) - W(t_i)] = \sum_{i=0}^{n-1} h(t_i)\Delta W_i;$$

- Nótese que t_i es el **extremo izquierdo** del intervalo $[t_i, t_{i+1}]$.
- Estas sumas, cuando $max_i\,|t_{i+1} - t_i| \longrightarrow 0$, convergen en L_2 a **la integral de Ito**:

$$\boxed{\int_a^b h(t)\,dW(t) = \lim \sum_{i=0}^{n-1} h(t_i)\,\Delta W_i}.$$

La interpretación correcta de la EDE (5), es en la forma integral (6), en donde la integral

$$\int_0^t G(x_s)\,dW_s$$

se interpreta en el sentido de Ito.

Teorema de existencia y unicidad de soluciones de una EDE

Considere la EDE

$$dx_t = F(x_t)dt + G(x_t)dW_t, \quad t \geq 0, \quad x_0 = x.$$

Suponga que se satisface la siguiente condición de Lipschitz: existe una constante K tal que, para todo x, y:

$$|F(x) - F(y)| + |G(x) - G(y)| \leq K|x - y|.$$

Entonces la EDE tiene una **única** solución $\{x_t\}$. Además, esta solución es **continua** y tiene la **propiedad de Markov**.

Terminología: $F(x)$ es el coeficiente de deriva (o coeficiente de tendencia), y $G(x)$ es el coeficiente de dispersión.

Ejemplo. Considérese la EDE **lineal**

$$dx_t = [Ax_t + a(t)]dt + B(t)dW_t, \quad t \geq 0, \quad x_0 = x.$$

su solución es

$$x_t = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}[a(s)ds + B(s)dW_s].$$

Ecuación de Langevin: $dx_t = -\alpha x_t dt + \sigma dW_t$ es decir,

$A = -\alpha$, $a(t) \equiv 0$, $B(t) \equiv \sigma$

su solución es

$$x_t = e^{-\alpha t}x_0 + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)}dW_s, \quad t \geq 0.$$

Ejemplo. **Aplicación. Mercados financieros**. Un mercado financiero es un proceso estocástico $x(t) = (x_0(t), x_1(t), \ldots, x_n(t))$, para $0 \leq t \leq T$, de la forma

$$dx_0(t) = \rho(t) x_0(t) dt, \qquad x_0(0) = 1;$$

$$dx_i(t) = \mu_i(t) dt + \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij}(t) dW_j(t), \qquad x_i(0) = x_i$$

para $i = 1, \ldots, n$. Los coeficientes μ_i y σ_{ij} pueden ser aleatorios.

- Para cada $i = 0, 1, \ldots, n$, $x_i(t)$ representa el precio del activo i al tiempo t. El activo i=0 se llama **activo sin riesgo** (o activo seguro) y los activos para i=1, …, n **son activos con riesgo**.

- Un **portafolio** (de inversión) es un proceso estocástico

$$\theta(t) = \left(\theta_0(t), \theta_1(t), \ldots, \theta_n(t)\right), \qquad 0 \leq t \ \leq T,$$

donde $\theta_i(t)$ es el número de unidades del activo i ($i= 0,1, \ldots ,n$) que tiene un inversionista al tiempo t. El **valor** de este portafolio es

$$V^{\theta}(t) = \theta_0(t)x_0(t) + \theta_1(t)x_1(t) + \ \ldots + \theta_n(t)x_n(t).$$

Otras aplicaciones

- **Extracción de recursos (renovables y no renovables)**
- **Crecimiento económico.**
- **Seguros (e.g. de vida).**
- **Sistemas de producción.**
- **Control estocástico en agricultura.**

Referencias

- Chang, F. -R., *Stochastic Optimization in Continuous Time*, Cambridge University Press, 2004.

- Morimoto, H., *Stochastic Control and Mathematical Modeling*, Cambridge University Press, 2010.

- Pham, H., *Continuous-Time Stochastic Control and Optimization with Financial Applications*, Springer, 2009.

Nota importante:

En lugar de la integral de Ito se pueden definir **otras** integrales estocásticas.

Esto **no** es importante desde el punto de vista matemático, pero **sí desde el punto de vista de modelación**.