Julio 2024

Introducción a la Teoría de Juegos

Onésimo Hernández–Lerma

Departamento de Matemáticas

Cinvestav–IPN

Resumen. Esta es una presentación introductoria de algunos conceptos básicos y aplicaciones de la teoría de juegos *estratégicos*. Se incluyen temas sobre juegos cooperativos y no–cooperativos, estáticos y dinámicos, deterministas y estocásticos.

¿Qué es un juego?

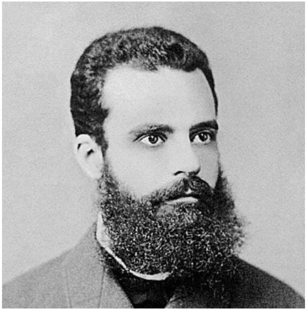
Un juego es un modelo matemático de una situación de cooperación (negociación) o de competencia (conflicto) entre tomadores de decisiones (por ejemplo, personas, empresas, gobiernos, etc.) llamados jugadores, agentes, controladores,...

Palabras clave: cooperación; competencia.

Hay dos grandes clases de juegos:

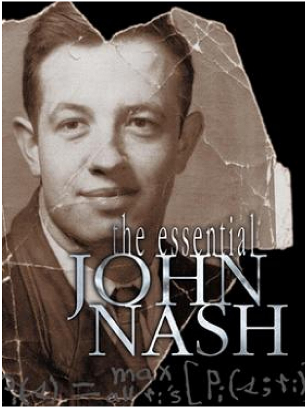
cooperativos y **no–cooperativos**

Equilibrios cooperativos: Optimos de Pareto (o soluciones eficientes o inmejorables,...), soluciones de negociación o de regateo (bargaining solutions), soluciones de compromiso,...



Vilfredo Pareto

Equilibrios no–cooperativos: Equilibrios de Nash, equilibrios minimax, equilibrios de Stackelberg,...



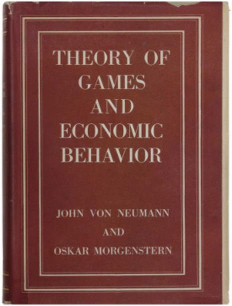
Notas históricas

[Paul Walker, *A chronology of game theory.*]

1944. Nacimiento de la teoría de juegos "moderna" con el libro

Theory of games and economic behavior

de John von Neumann y Oskar Morgenstern.




Notas históricas

Abraham Wald: enfoque "minimax" (o *robusto* o de *juegos contra la naturaleza*) de la teoría de la decisión estadística. 1945.

Problema. Minimizar la funcion $f_\theta : X \mapsto \mathbb{R}$ que depende de un parámetro *desconocido* θ; sin embargo, se sabe que θ pertenece a conjunto Θ.

Solución de Wald. Considérese un juego con dos jugadores.

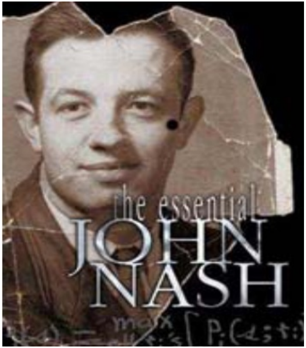
- Un jugador es "la naturaleza" que selecciona el parámetro $\theta \in \Theta$. Para cada $x \in X$, calcule "lo **peor** que puede ocurrir", i.e., $F(x) := max_{\theta \in \Theta} f_\theta(x)$.
- El otro jugador es el "minimizador" que desea calcular x^* tal que $F(x^*) = min_{x \in X} F(x)$, es decir,

$$F(x^*) = min_x max_\theta f_\theta(x).$$

Este problema se conoce como un *juego contra la naturaleza*, problema de *optimización robusta*, o *control del peor caso*, y se dice que x^* es una *solución minimax* o *solución robusta* del problema.

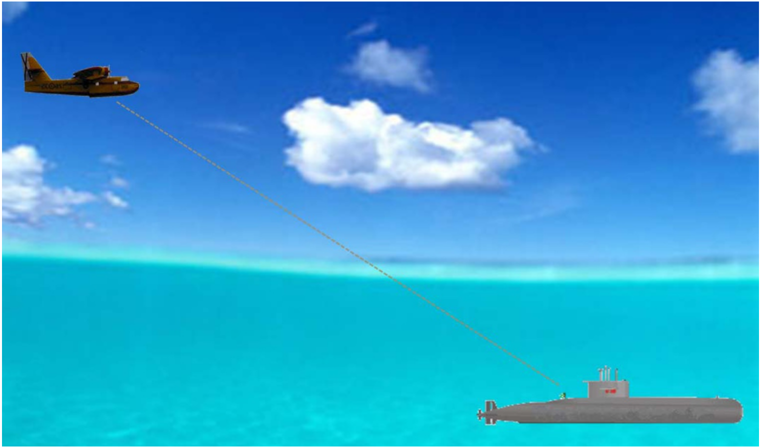
John Nash: juegos no–cooperativos, juegos de negociación. 1950.

Nobel Prize 1994.



Notas históricas

- Durante la 2a Guerra Mundial se usaron juegos de persecución–evasión en técnicas de guerra antisubmarina.



Sean $x(\cdot)$, $u(\cdot)$ el estado y control del **perseguidor**; $y(\cdot)$, $v(\cdot)$ el estado y control del **evasor**.

Problema del perseguidor: Encontrar el control minimax $\overline{u}(\cdot)$, i.e. $\bar{u}(\cdot)$ minimiza $\max_{v(\cdot)} J$ donde ...

$$J := \frac{a^2}{2}||x(T) - y(T)||^2 + \frac{1}{2}\int_0^T \left(||u(t)||^2 - ||v(t)||^2\right) dt$$

sujeto a

$$\dot{x}(t) = F_p(t)x(t) + G_p(t)u(t),$$

$$\dot{y}(t) = F_e(t)y(t) + G_e(t)v(t)$$

para $0 \leq t \leq T$, con condiciones iniciales $x(0)$, $y(0)$ dadas.

El caso estático

Considérese un juego estático (o de una tirada) G en *forma normal* (también llamada *forma estratégica*)

$$G := (N, \{A_i, i \in N\}, \{v_i, i \in N\})$$

donde

$N := \{1, 2, \ldots, n\}$ es el conjunto de jugadores; y, para cada $i \in N$,

A_i es el conjunto de acciones para el jugador i, y

$v_i : A \to \mathbb{R}$ es la función de pago del jugador i, donde

$$A := A_1 \times \cdots \times A_n.$$

Notación. Dado un vector (o “perfil estratégico”) $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$ y una acción $b_i \in A_i$, escribimos

$$a^{-i} := (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n),$$

$$(b_i, a^{-i}) := (a_1, \ldots, a_{i-1}, b_i, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

En particular (abusando de la notación), podemos escribir $a = (a_i, a^{-i})$.

Definición.

Se dice que el vector $\hat{a} = (\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n) \in A$ es un **equilibrio de Nash** para el juego G si, para cada $i \in N$,

$$v_i(\hat{a}_i, \hat{a}^{-i}) = \max_{a_i \in A_i} v_i(a_i, \hat{a}^{-i}).$$

Es decir, se tienen n problemas de optimización **acoplados**.

Ejemplo: la batalla de los sexos

Dos personas: “el” y “ella”. Cada uno puede elegir dos acciones: F (Futbol) o T (Teatro). Las funciones de pago $v_i(a, b)$, para $i = 1, 2$, están dadas por la bi-matriz.

		ELLA	
		F	T
EL	F	$\underline{2}$,$\underline{1}$	0,0
	T	0, 0	$\underline{1}$,$\underline{2}$

Ejemplo: el juego de los volados

Nota. Este es un juego de **suma cero**: para todo $a = (a_1, a_2)$,

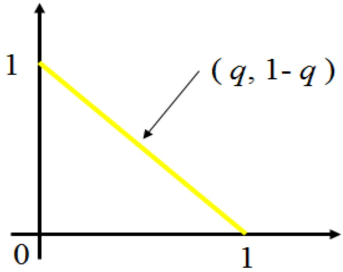
$$v_1(a) + v_2(a) = 0, \text{ i.e., } v_1(a) = -v_2(a)$$

Dos jugadores, cada uno con acciones a (águila)y s (sol).

		Jugador 2	
		a	s
Jugador 1	a	-1,$\underline{1}$	$\underline{1}$,-1
	s	$\underline{1}$,-1	-1,$\underline{1}$

No existe equilibrio de Nash en el conjunto de acciones (a_1, a_2)

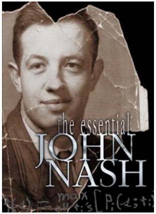
Sin embargo, sí existe un equilibrio de Nash en el conjunto de estrategias *mixtas* o *aleatorizadas*.



Nota. Una **estrategia mixta** para un jugador i es una distribución de probabilidad sobre A_i. Por ejemplo, si $A_i = \{a_1, ..., a_{n_i}\}$, una estrategia mixta sería $\rho = \{p_1, ..., p_{n_i}\}$ con $p_i \geq 0$ para todo i y $\sum_i p_i = 1$.

Teorema [Nash 1950]:

Considérese un juego estático **finito**, es decir, hay un número finito de jugadores y, además, cada jugador tiene sólo conjunto finito de posibles acciones. Entonces existe al menos un equilibrio de Nash en el conjunto de estrategias aleatorizadas.

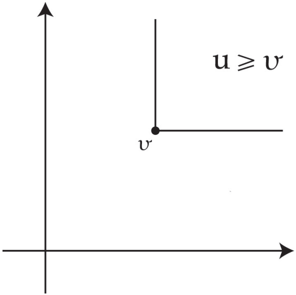


Juegos cooperativos

Notación: Dados los vectores $u = (u_1, ..., u_n)$ y $v = (v_1, ..., v_n)$.

$$u \geq v \quad \text{significa} \quad u_i \geq v_i \quad \forall\, i = 1, ..., n$$

$$u > v \quad \text{significa} \quad u \geq v \quad \text{y} \quad u \neq v.$$



Dado un juego $G = (N, \{A_1, ..., A_n\}, \{v_1, ..., v_n\})$, sea $r(a) := (v_1(a), ..., v_n(a)) \in \mathbb{R}^n$ el vector de pagos de $a \in A$, donde $A := A_1 \times \cdots \times A_n$, y sea $R := \{r(a) | a \in A\}$ el *conjunto objetivo* del juego G.

Dados $a, a' \in A$, decimos que a' es un *mejoramiento de Pareto* de a si

$$r(a') > r(a).$$

Decimos que $a^* \in A$ es un *óptimo de Pareto* (o Pareto–eficiente) si no existe un mejoramiento de a^*, es decir, no existe $a \in A$ tal que $r(a) > r(a^*)$. El conjunto de óptimos de Pareto se llama la *frontera de Pareto* de G.

Teorema. Si existe un vector $\rho = (\rho_1, ..., \rho_n)$ tal que $\rho_i > 0$ para todo $i = 1, ..., n$, $\rho_1 + \cdots + \rho_n = 1$ y, además, $a^* \in A$ maximiza la combinación convexa

$$\rho_1 v_1(a) + \cdots + \rho_n v_n(a), \; a \in A,$$

entonces a^* es un óptimo de Pareto. (El recíproco se cumple si el conjunto A es convexo y las funciones $v_1, ..., v_n$ son cóncavas.)

El siguiente ejemplo ilustra dos situaciones:

- **La tragedia de los comunes**
  [Garrett Hardin, *The tragedy of the commons*. Science 162 (1968), pp. 1243-1248.]
- **El precio de la anarquía**
  [E. Koutsoupias, C. Papadimitriou, *Worst-case equilibria*. Computer Sci. Rev. 3 (2009), pp. 65-69.

Ejemplo. Considérese un conjunto de n agentes cada uno de los cuales desea enviar datos a través de un canal compartido con capacidad máxima 1. Cada jugador debe decidir la cantidad de datos que envía por el canal, medidos como una fracción de la capacidad. Idealmente, al jugador le gustaría enviar la mayor cantidad posible de datos. El problema es que la calidad del canal se va degradando conforme se utiliza una mayor fracción y si el canal se sobreutiliza ya no pueden pasar los datos. En este contexto, el conjunto de acciones del jugador i es $A_i = [0, 1]$ y su función de utilidad es

$$\begin{aligned} v_i(a) \quad &:= \quad a_i\Big(1 - \sum_{j=1}^{n} a_j\Big) \quad \text{si} \quad \sum_j a_j \le 1, \\ &:= \quad 0 \quad \text{en caso contrario.} \end{aligned}$$

En este caso, el juego tiene un único equilibrio de Nash a^* con $a_i^* = 1/(n+1)$ para $i = 1, ..., n$ y la utilidad resultante de cada jugador es $v_i(a^*) = 1/(n+1)^2$. Por otra parte, el óptimo de Pareto es $\hat{a}$ con $\hat{a}_i = 1/2n$ para $i = 1, ..., n$ y la utilidad de cada jugador es $v_i(\hat{a}) = 1/4n$. Esto es una "tragedia" porque $v_i(a^*) < v_i(\hat{a})$ para todo i. La diferencia

$$v_i(\hat{a}) - v_i(a^*) > 0$$

se llama "el precio de la anarquía", es decir, el precio por no cooperar. $\diamond$

Juegos potenciales

Sea $G = (N, \{A_1, ..., A_n\}, \{v_1, ..., v_n\})$ un juego estrategico y $A := A_1 \times \cdots \times A_n$. Decimos que G es un *juego potencial* si existe un problema de **optimización** cuyos óptimos son equilibrios de Nash para G.

Más explícitamente, G es un juego potencial si existe una función $P : A \to \mathbb{R}$ tal que si $a^* \in A$ optimiza P, entonces a^* es un equilibrio de Nash para G. En este caso, se dice que P es un potencial (o función potencial) para G.

¿Por qué son importantes los juegos potenciales? De entrada, un problema de optimización es más fácil de analizar que un problema de juegos. Además:

(a) En un juego potencial existen equilibrios de Nash *puros*, es decir, no aleatorizados;

(b) Es más fácil estudiar problemas de estabilidad o de sensibilidad;

(c) Se pueden identificar juegos cuyos óptimos de Pareto son también equilibrios de Nash.

Ejemplo. Se dice que G es un *juego de coordinación* o *juego de equipo* (team game) si existe una función $P : A \to \mathbb{R}$ tal que

$$v_i(a) = P(a) \quad \forall\, a \in A, i = 1, ..., n.$$

(En juegos dinámicos un juego de equipo se conoce como *problema de control decentralizado*.)

El nombre de "juego potencial" se debe al siguiente hecho.

Proposición. [Slade (1994), Monderer y Shapley (1996).] Sea G un juego normal en el que los conjuntos de acciones A_i son intervalos en $\mathbb{R}$ y las funciones de pago v_i son continuamente diferenciables. Entonces una función $P : A \to \mathbb{R}$ es un potencial para G ssi P es continuamente diferenciable y, para cada $i \in I$,

$$\frac{\partial v_i}{\partial a_i} = \frac{\partial P}{\partial a_i}.$$

Ejemplo. Sea G como en la proposición anterior con las funciones v_i dos veces continuamente diferenciables. Entonces una función $P : A \to \mathbb{R}$ es un potencial para G ssi, para cada $i \in I$, existen funciones $g_i(a^{-i})$ tales que

$$v_i(a) = P(a) + g_i(a^{-i}) \quad \forall\, a \in A. \tag{$*$}$$

Un caso trivial de (*) son los juegos de equipo en los que $g_i(\cdot) \equiv 0$ para todo $i \in I$.

Ejemplo. Un juego G con dos jugadores es un *juego de suma cero* si $v_1(a) + v_2(a) = 0$ para todo $a = (a_1, a_2) \in A$. En este caso, G es un juego potencial con función de pago $v(\cdot) := v_1(\cdot) = -v_2(\cdot)$ ssi existen funciones g_1, g_2 tales que

$$v(a_1, a_2) = g_1(a_1) + g_2(a_2).$$

La función potencial de G es $P(a) = v(a)$ para todo $a = (a_1, a_2)$,

GRACIAS POR SU ATENCION