Grupos en Geometría y Topología

Miguel A. Xicoténcatl M.

Algunas definiciones:

⋆ El espacio proyectivo (real) de dimensión n, $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$, es el cociente de la esfera unitaria $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ por la relación de equivalencia que identifica puntos antipodales.

⋆ El grupo ortogonal (en dimensión n) es el conjunto $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A \cdot A^t = I\}$ con la multiplicacion de matrices. El grupo ortogonal especial, conocido también como el grupo de rotaciones de $\mathbb{R}^n$, es el subgrupo $SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det(A) = 1\}$.

⋆ Un *grupo de Coxeter* es un subgrupo discreto de las isometrías de $\mathbb{R}^m$ generado por un número finito de reflexiones en hiperplanos. Su presentación típica es de la forma $W_\Gamma = \langle s_1, \ldots, s_n \mid s_i^2 = 1 = (s_i s_j)^{m_{ij}},\ \forall i \neq j \rangle$ donde $m_{ij} \in \{2, 3, \ldots, \infty\}$. Esta presentación suele codificarse por medio de un grafo etiquetado Γ.

⋆ El *grupo de Artin* asociado a dicho grupo de Coxeter es el grupo con la presentación

$$A_\Gamma = \langle s_1, \ldots, s_n \mid \underbrace{s_i s_j s_i \ldots}_{m_{ij}} = \underbrace{s_j s_i s_j \ldots}_{m_{ij}} \quad \forall\, i \neq j \rangle$$

Notemos que existe un epimorfismo natural $A_\Gamma \to W_\Gamma$.

Problemas:

1. Muestre que $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ es homeomorfo al cociente del disco unitario $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ por la relación de equivalencia que identifica puntos antipodales en $\partial D^n = S^{n-1}$.

2. Probar que $SO(3)$ es homeomorfo al espacio proyectivo $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$.

   Sugerencia:

   a) Demostrar que toda $A \in SO(3)$ posee un vector propio v con con valor propio 1. Notemos que con respecto al eje determinado por v, A es una rotación por un ángulo $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

   b) Sea D^n_π el disco cerrado de dimensión n y radio π. Definimos una función continua $f : D^n_\pi \to SO(3)$ enviando $v \in D^n_\pi$ a la matriz de la rotación con eje v y ángulo $\theta = \|v\|$. Probar que f pasa al cociente y define un homeomorfismo

$$\begin{tikzcd} D^n_\pi \arrow[r, "f"] \arrow[d] & SO(3) \\ D^n_\pi/\sim \arrow[ur, "\approx"'] & \end{tikzcd}$$

3. Sean $s, t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dos transformaciones lineales dadas por reflexiones con respecto a un par de rectas que pasan por el origen y que forman entre sí un ángulo θ. Demostrar que la composición $s \cdot t$ es una rotación por un ángulo 2θ.

4. Sea S_n el n-ésimo grupo simétrico, el cual actúa en $\mathbb{C}^n$ permutando coordenadas.

    a) Muestre que S_n es un grupo de Coxeter de la forma W_Γ, tomando como generadores $s_1, \ldots, s_{n-1}$, donde s_i es la transposición $(i, i+1)$.

    b) ¿Cuál es la presentación del correspondiente grupo de Artin en este caso?

Observemos que la transposición (i, j) permuta las coordenadas z_i y z_j y el hiperplano fijo en este caso es

$$H_{ij} = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_i \neq z_j\}.$$

En este ejemplo, complemento de hiperplanos para el grupo $W_\Gamma = S_n$ es el espacio

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\Gamma &= \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_i \neq z_j, \text{ si } i \neq j\} \\ &= \mathrm{Conf}_n(\mathbb{C}) \end{aligned}$$

conocido como el *espacio de configuraciones de n puntos distintos* en $\mathbb{C}$. De aquí se sigue que

$$\begin{aligned} A_\Gamma &= \pi_1\Big(\mathcal{H}_\Gamma / W_\Gamma\Big) \\ &= \pi_1\Big(\mathrm{Conf}_n(\mathbb{C})/S_n\Big). \end{aligned}$$

Este grupo se conoce como el *grupo de trenzas en n cuerdas* y es muy importante en teoría geométrica de grupos, topología algebraica y topología de bajas dimensiones

Referencias:

1. R. Jiménez, M. Xicoténcatl. Configuration spaces and braid groups Snapshots of modern mathematics from Oberwolfach (2019), no. 11.

    https://www.imaginary.org/snapshot/configuration-spaces-and-braid-groups

2. J. McCammond. The mysterious geometry of Artin groups, Winter Braids Lecture Notes.

    https://proceedings.centre-mersenne.org/item/10.5802/wbln.17.pdf

3. L. Paris. Lectures on Artin Groups and the $K(\pi, 1)$-conjecture, Springer Proc. Math. Stat. 82.

4. J. González-Meneses. Basic Results on Braid Groups. https://arxiv.org/pdf/1010.0321