Análisis de Fourier Finito
Curso de Verano 2024

Departamento de Matemáticas
jmb@math.cinvestav.mx

En este siglo XXI, las "tecnologías de Fourier" se usan ampliamente en nuestra vida cotidiana, y, como era de esperarse, en la mayoría de las aplicaciones dichas tecnologías vienen ocultas en "cajas negras". Aún los expertos en estas tecnologías las usan sin conocer a detalle el cómo se han implementado los métodos de Fourier. Esta sencilla observación nos debería de servir como una llamada de atención, para que las nuevas generaciones de científicos que deseen jugar un rol importante en el desarrollo de futuras tecnologías, hagan más que sólo trabajar con cajas negras, estos científicos deberán conocer con mayor profundidad las bases teóricas presentes en las tecnologías de Fourier, con el fin de que, no sólo les encuentren nuevas aplicaciones, sino también, y aún más importante, que puedan crear y construir nuevas tecnologías basadas en éllas.

K. Kido
Digital Fourier Analysis

Temas

- Transformada de Fourier
- Operación de convolución
- Fórmula suma de Poisson

Resumen

- Cada conjunto finito tiene asociado un espacio de Hilbert. $L^2(S)$; $\langle f, g\rangle := \sum f(s)\overline{g(s)}$
- Este espacio de Hilbert está provisto de una base ortonormal canónica. $\{\delta_s\}$
- Cada base ortonormal del espacio determina una transformada. $B_s \overset{\mathcal{F}}{\mapsto} \delta_s$
- La transformada identifica cada función con sus coeficientes con respecto a dicha base ortonormal. $\mathcal{F}f(s) = \langle f, B_s\rangle$
- Cada transformada tiene su propia fórmula de inversión. $f = \sum \mathcal{F}f(s)B_s$
- Esto implica que los coeficientes de la función guardan toda la información de la función.
- La transormada es una isometría por construcción.
- El adjunto de la transformada es su inversa. $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^{-1}$.

- Cuando el conjunto es un grupo abeliano, el grupo actúa como translaciones sobre el espacio de Hilbert. $T_a f(x) = f(x-a)$
- Cada translación es un operador unitario y por lo tanto diagonalizable. $T_a^* = T_{-a}$
- Las translaciones conmutan entre sí, por lo que existe una base en la que se diagonalizan simultáneamente. $T_a T_b = T_{a+b} = T_b T_a$
- Para describir esta base debemos estudiar los caracteres del grupo. $\chi(a+b) = \chi(a)\chi(b)$
- Los valores de un caracter son raíces de la unidad. $|\chi(a)| = 1$
- Todo grupo tiene al menos el caracter trivial. $\chi_0(a) = 1 \; \forall \, a$
- Los caracteres de un grupo G forman también un grupo abeliano, llamado el grupo de caracteres o grupo dual, y se denota por $\widehat{G}$. $(\chi\psi)(a) = \chi(a)\psi(a)$
- Las primeras relaciones de ortogonalidad nos dicen que los caracteres forman una base ortogonal, llamada la base de armónica o de caracteres. $\langle \chi, \psi \rangle = \delta_{\chi\psi} |G|$
- La base de Fourier del grupo es la base de caracteres normalizada. $B_s = (1/\sqrt{|G|})\,\chi$
- La base de Fourier es la que define la transformada de Fourier sobre el grupo: $B_s \overset{\mathcal{F}}{\mapsto} \delta_s$
- Por el teorema de estructura de grupos abelianos finitos, el estudio de caracteres se reduce al caso en que el grupo es cíclico.
- Los caracteres de un grupo cíclico son fáciles de describir. $a \mapsto \chi_a$; $\chi_a(b) = \omega^{ab} = e^{2\pi i ab/n}$
- De esto se sigue que $\chi_a(b) = \chi_b(a)$ y $\overline{\chi(a)} = \chi(-a)$.
- $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- $\widehat{G_1 \times G_2} \simeq \widehat{G_1} \times \widehat{G_2}$; $(\chi_1 \otimes \chi_2)(g_1, g_2) = \chi_1(g_1)\chi_2(g_2)$
- $\widehat{G} \simeq G$, aunque no de manera canónica.
- (Peter-Weyl) Existencia de suficientes caracteres: $\forall \, a \in G \backslash \{0\} \; \exists \, \chi$ tq $\chi(a) \neq 1$.
- Los caracteres forman una base de eigenvectores común para todas las translaciones. $T_a(B_\chi) = \overline{\chi(a)} B_\chi$
- Dualidad de Pontryagin: $G \simeq \widehat{\widehat{G}}$. $a \mapsto a^*$, $a^*(\chi) = \chi(a)$
- Segundas relaciones de ortogonalidad: $\forall \, a, b \in G$, $\sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi(a)\overline{\chi(b)} = \delta_{ab} \, |G|$.
- En el espacio de Hilbert se tienen definidos dos productos: el producto puntual y el producto convolución. $(fg)(s) = f(s)g(s)$, $(f * g)(s) = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum f(s-a)g(a)$

- (i) $B_s(a+b) = \sqrt{|G|}B_s(a)B_s(b)$; (ii) $B_s * B_t = \delta_{st}B_s$.
- Una álgebra de Banach es un espacio de Banach provisto de un producto bilineal asociativo cuya norma satisface $||xy|| \leq ||x||\,||y||$ para todo x, y.
- Cada uno de estos productos determina una estructura de álgebra de Banach conmutativa unitaria sobre el espacio de Hilbert $L^2(G)$.
- La importancia de la transformada de Fourier es que nos da un isomorfismo entre estas dos álgebras de Banach. $\widehat{f\,g} = \widehat{f}\,\widehat{g}$
- La transformada de Fourier es, escencialmente, la única transformada con la propiedad $\widehat{f\,g} = \widehat{f}\,\widehat{g}$.
- El operador convolución con kernel h es el operador lineal $C_h : L^2(G) \to L^2(G)$, dado por $C_h(f) = h * f$.
- $\{B_g : g \in G\}$ es una base ortonormal de eigenvectores de C_h; el eigenvalor de B_g es $\widehat{h}(g)$.
- C_h es un operador normal, pero no es unitario. ($C_h^* = C_{\bar{\tilde{h}}}$).
- Un operador se dice G-invariante si conmuta con todas las translaciones. $TT_a = T_aT\ \forall\, a$
- Para un operador $T \in \mathrm{End}(L^2(G))$ son equivalentes: (i) T es G-invariante; (ii) T es un operador convolución; (iii) Todo caracter de G es un eigenvector de T.
- Para H subgrupo de G se define $\widehat{G}_H := \{\chi \in \widehat{G} : \chi(h) = 1 \text{ para todo } h \in H\}$.
- $\widehat{G}_H$ es un subgrupo de $\widehat{G}$ y $\widehat{G}_H \simeq \widehat{G/H}$ vía $\widehat{G}_H \to \widehat{G/H}$, $\chi \mapsto \chi_*$, donde $\chi_*(\overline{g}) = \chi(g)$.
- Fórmula suma de Poisson: G un grupo abeliano finito, H un subgrupo de G y $g \in G$. Para todo $f \in L^2(G)$ se tiene que $\sum_{h\in H} f(gh) = \frac{1}{|G/H|}\sum_{\chi\in\widehat{G}_H}\chi(g)\widehat{f}(\chi)$.
- $G = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un grupo abeliano. Un operador lineal $\Phi_K : L^2(G) \to L^2(G)$ de la forma $\Phi_K(f)(x) = \sum_{y\in G} K(x,y)f(y)$, donde K es un elemento de $L^2(G\times G)$, se le llama un operador integral con kernel K.
- Existe una correspondencia uno-a-uno entre operadores integrales y kerneles.
- Existe una correspondencia uno-a-uno entre kerneles y matrices en $M_n(\mathbb{C})$. $K \leftrightarrow (a_{ij})$, donde $a_{ij} = K(x_i, x_j)$.
- El operador integral Φ_K conmuta con todas las translaciones si y sólo si existe una función $h \in L^2(G)$ tal que K es de la forma $K(x,y) = h(x-y)$ para todo $x, y \in G$. En este caso Φ_K es el operador convolución con kernel h, esto es, $\Phi_K(f) = h * f$.
- Para las aplicaciones a probabilidad se redefine $\langle f, g\rangle := \frac{1}{|G|}\sum f(s)\overline{g(s)}$ y $(f*g)(s) := \sum f(s-a)g(a)$.

- Una (distribución de) probabilidad sobre G es un elemento $P \in L^2(G)$ tal que $P(s) \in [0,1]$ y $\sum P(s) = 1$.
- El producto convolución de dos probabilidades es nuevamente una probabilidad.
- Si P es una probabilidad sobre G, a la sucesión de probabilidades, $P, P*P, P*P*P, \ldots$ se le llama la caminata aleatoria en G con probabilidad P.
- Cuándo una caminata aleatoria converge a la probabilidad uniforme?

Ejemplos

- Principio de incertidumbre.
- Ley de reciprocidad cuadrática.
- Teorema de Fermat para campos finitos.
- Espectro de gráficas de Cayley.
- Identidad de Macwilliams en la teoría de códigos.
- Teorema de Cauchy-Davenport.
- Caminatas aleatorias en grupos abelianos.
- Teorema ergódico de Markov.

Referencias

- Análisis armónico sobre grupos finitos; T. Ceccherini *et al.*
- Análisis de Fourier sobre grupos abelianos finitos; B. Luong
- Teoría de representaciones de grupos finitos; B. Steinberg
- Análisis de Fourier sobre grupos y aplicaciones; A. Terras