Introducción al Análisis de Clifford

Dr. R. Michael Porter K.

Depto. de Matemáticas
CINVESTAV–Querétaro

Escuela de Verano
Cinvestav
2024

Martes

PARTE I
LAS ÁLGEBRAS DE CLIFFORD

Una integral clásica:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{(x+1)(x-1)}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}(\log(x+1) - \log(x-1)) \\
&= \frac{1}{2}\log\frac{x-1}{x+1}
\end{aligned}$$

más una constante de integración.

Con un cambio de signo en el problema:

$$\int \frac{1}{x^2 + 1}\,\mathrm{d}x,$$

No se puede factorizar el denominador.

Con un cambio de signo en el problema:

$$\int \frac{1}{x^2 + 1}\,\mathrm{d}x,$$

No se puede factorizar el denominador. ¿O sí?

Si $i^2 = -1$, entonces $x^2 + 1 = (x+i)(x-i)$.

$$\frac{i}{2}\int \left(\frac{1}{x+i} - \frac{1}{x-i}\right)\mathrm{d}x = \frac{i}{2}\log\frac{x+i}{x-i}$$

más una constante de integración.

La filosofía general:

1. Extender el sistema en que trabajamos, de manera que exista una solución al problema, expresada en términos de este sistema más general.
2. Estudiar las propiedades del nuevo sistema.
3. Usar este conocimiento para expresar la solución en términos del sistema original.

Propiedades de números complejos

$$e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i \operatorname{sen}\theta$$

o sea

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2},$$
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

En la fórmula aparece $(x+i)/(x-i)$, y cuando $x \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\left|\frac{x+i}{x-i}\right| = 1.$$

Esto implica que $(x+i)/(x-i) = e^{i\theta}$ para algun $\theta \in \mathbb{R}$. Entonces resolvemos:

$$
\begin{aligned}
x + i &= e^{i\theta}(x - i), \\
e^{i\theta}x - x &= i + ie^{i\theta}, \\
x &= i\frac{e^{i\theta} + 1}{e^{i\theta} - 1} = i\frac{e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2}}{e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}} \\
&= \cot\frac{\theta}{2},
\end{aligned}
$$

o sea

$$
\frac{\theta}{2} = \operatorname{arccot} x.
$$

Estos nos da finalmente

$$
\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{i}{2}\log\frac{x+i}{x-i} = \frac{i}{2}\log e^{i\theta} = -\frac{\theta}{2} = -\operatorname{arccot} x + \text{constante}
$$

que no lleva números imaginarios.

Las álgebras de Clifford surgen del deseo de multiplicar vectores.

Tomemos un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$ con base

$$e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n.$$

Para fijar ideas, queremos extender V a un álgebra sobre los reales, es decir aparte de las reglas de espacio vectorial

$$r\,(x+y) = rx + ry, \quad (r+s)x = rx + sx,$$

se satisfacen las reglas multiplicativas

$$r\,(xy) = (rx)y = x(ry), \quad (rs)x = r(sx),$$

cuando $r, s \in \mathbb{R}$, mientras que x, y están en el álgebra.

Tenemos que definir sumas y productos.

Primero tenemos que entender los productos de dos vectores básicos,

$$\begin{array}{c} e_1e_1,\ e_1e_2,\ e_1e_3,\ \ldots,\ e_1e_n, \\ e_2e_1,\ e_2e_2,\ e_2e_3,\ \ldots,\ e_2e_n, \\ e_3e_1,\ e_3e_2,\ e_3e_3,\ \ldots,\ e_3e_n, \\ \vdots \\ e_ne_1,\ e_ne_2,\ e_ne_3,\ \ldots,\ e_ne_n, \end{array}$$

pero estos productos no tienen que ser vectores.

Ponemos la regla $e_i e_j = -e_j e_i$ cuando $i \neq j$:

$$\begin{array}{ccccc}
e_1^2, & e_1 e_2, & e_1 e_3, & \dots, & e_1 e_n, \\
-e_1 e_2, & e_2^2, & e_2 e_3, & \dots, & e_2 e_n, \\
-e_1 e_3, & -e_2 e_3, & e_3^2, & \dots, & e_3 e_n, \\
 & & & \vdots & \\
-e_1 e_n, & -e_2 e_n, & -e_3 e_n, & \dots, & e_n^2.
\end{array}$$

También queremos una identidad multiplicativa e_0 (no es un vector):

$$e_0 \neq e_i \text{ para } i \geq 1,$$
$$e_0 e_i = e_i e_0 = e_i$$

para todo i. Decimos "$e_0 = 1$".

Los cuadrados de los e_i podrían definirse de muchas maneras, tomaremos para $i \geq 1$

$$e_i^2 = -1.$$

Pero como los productos como $e_1 e_2$ no son vectores, tenemos que entender cómo multiplicarlos con otras cosas que ya tenemos, como $(e_1 e_2)e_3$ o $(e_1 e_2)(e_1 e_2)$.

Un producto general a considerarse es

$$e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k},$$

con $0 \leq i_l \leq n$ para $1 \leq l \leq k$ $(k \in \mathbb{N})$.

(Después multiplicaremos sumas de estas cosas.)

Regla general: quitar los factores e_0, luego aplicar $e_i^2 = -1$ cada vez que se pueda, de otro modo aplicar $e_i e_j = -e_j e_i$ para ordenar los índices:

$$
\begin{aligned}
e_1 e_3 e_4 e_2 e_3 &= -e_1 e_3 e_4 e_3 e_2 \\
&= e_1 e_4 e_3 e_3 e_2 \\
&= -e_1 e_4 e_0 e_2 \\
&= -e_1 e_4 e_2 \\
&= e_1 e_2 e_4
\end{aligned}
$$

Elementos puros: los índices van en orden creciente, sin repeticiones.

Elementos puros

$$
\begin{array}{rl}
0: & e_0, \\
1: & e_1,\ e_2,\ e_3,\ \ldots,\ e_n, \\
2: & e_1e_2,\ e_1e_3,\ \ldots,\ e_1e_n,\ e_2e_3,\ \ldots,\ e_{n-1}e_n, \\
3: & e_1e_2e_3,\ e_1e_2e_4,\ \ldots,\ e_1e_2e_n,\ e_1e_3e_4,\ \ldots,\ e_{n-2}e_{n-1}e_n, \\
 & \vdots \\
n-1: & e_1e_2\cdots e_{n-1},\ e_1\cdots e_{n-2}e_n,\ ,e_1\cdots e_{n-3}e_{n-1}e_n,\ \ldots,\ e_2e_3\cdots e_n, \\
n: & e_1e_2e_3\cdots e_n,
\end{array}
$$

En el renglón k hay

$$\binom{n}{k} = \frac{k!(n-k)!}{n!}$$

productos, y en total son

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n.$$

A veces se escribe $e_{\{1,2\}}$ o e_{12} en lugar de $e_1 e_2$, etc. Así para un conjunto $A = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ tal que $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$, se tiene

$$e_A \;=\; e_{i_1 i_2 \cdots i_k} \;=\; e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}$$

Los elementos del *álgebra de Clifford* $\mathcal{C}\ell(n)$ son sumas con coeficientes reales

$$x = \sum_A x_A e_A,$$

que se suman término por término

$$\sum_{A \in 2^n} x_A e_A \;+ \sum_{A \in 2^n} x'_A e_A \;=\; \sum_{A \in 2^n} (x_A + x'_A) e_A$$

y se multiplican usando la ley distributiva

$$\left(\sum_{A \in 2^n} x_A e_A \right) \left(\sum_{A \in 2^n} x'_A e_A \right) \;=\; \sum_{B \in 2^n} y_B \, e_B$$

donde es un poco complicado escribir una fórmula para y_B.

Claro, escribimos sólo $e_1 e_2$ en lugar de

$$0e_0 + 0e_1 + 0e_2 + 1e_1 e_2 + 0e_1 e_3 + 0e_2 e_3 + 0e_1 e_2 e_3.$$

Las álgebras de Clifford tienen variantes, por ejemplo en $\mathcal{C}\ell_{p,q}$ se usa $e_i^2 = 1$ para $1 \leq i \leq p$, y $e_i^2 = -1$ para $p+1 \leq i \leq p+q$. Así

$$\mathcal{C}\ell_{0,n} = \mathcal{C}\ell(n).$$

Los elementos de las diversas álgebras $\mathcal{C}\ell_{p,q}$ para $p+q=n$ fijo son los mismos, que forman un espacio vectorial de dimensión 2^n, pero las multiplicaciones son distintas.

En $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ se tiene

$$(1+e_1)(1-e_1) = 2,$$

pero en $\mathcal{C}\ell_{n,0}$ se tiene

$$(1+e_1)(1-e_1) = 0.$$

escalar (0-vector): múltiplo real de e_0.

vector (1-vector): combinináción lineal de $e_1, e_2, \ldots, e_n$

pseudoscalar (n-vector): múltiplo real de $e_1 e_2 \cdots e_n$

paravector: suma de un escalar y un vector

Un elemento general del álgebra de Clifford es *mixto*, puede llevar productos básicos de distintos grados:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{A} x_A e_A \\ &= \sum_{\#A=0} x_A e_A + \sum_{\#A=1} x_A e_A + \cdots + \sum_{\#A=n} x_A e_A \\ &= [x]_0 \qquad\qquad + [x]_1 \qquad + \cdots \qquad + [x]_n. \end{aligned}$$

Parte escalar:
$$\mathrm{Sc}\, x = [x]_0.$$

Conjugado:
$$\begin{aligned}\overline{x} &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k(k+1)/2}\, [x]_k \\ &= [x]_0 \ - \ [x]_1 \ - \ [x]_2 \ + \ [x]_3 \ + \ [x]_4 \ - \ [x]_5 \ - \ \cdots \ .\end{aligned}$$

Cuando x es paravector,
$$(1/2)(x + \overline{x}) = \mathrm{Sc}\, x,$$

Se tiene $\overline{e_0} = e_0$, $\overline{e_i} = -e_i$ $(i \geq 1)$, además
$$\overline{(rx)} = r\overline{x}, \ \overline{(\overline{x})} = x, \ \overline{x + y} = \overline{x} + \overline{y}, \ \overline{(xy)} = \overline{y}\,\overline{x}.$$

Las operaciones de álgebra de Clifford se relacion con propiedades geométricas como longitud y ángulo:

$$
\begin{aligned}
|x| &= \Big(\sum_A (x_A)^2 \Big)^{1/2}, \\
x \cdot y &= \sum_A x_A \, y_A.
\end{aligned}
$$

Pero hay que tener cuidado: Sea $x = e_1 + e_2 e_3$ en $\mathcal{C}\ell(3)$, luego $|x| = \sqrt{2}$ y $\overline{x} = -e_1 - e_2 e_3 = -x$, luego

$$
\begin{aligned}
x \, \overline{x} &= -(e_1 + e_2 e_3)^2 \\
&= -(-1 + e_1 e_2 e_3 + e_2 e_3 e_1 + e_2 e_3 e_2 e_3) \\
&= 2 + 2 e_1 e_2 e_3 \\
&\neq 2 = |x|^2.
\end{aligned}
$$

Proposición

Sean $x, y \in \mathcal{C}\ell(n)$. Entonces

$$x \cdot y = \mathrm{Sc}(x\,\overline{y}) = \mathrm{Sc}(\overline{x}\,y),$$
$$|x|^2 = \mathrm{Sc}(x\,\overline{x}) = \mathrm{Sc}(\overline{x}\,x).$$

Muchas más propiedades buenas se tienen para los paravectores

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Proposición

Sea $x = \mathrm{Sc}\, x + [x]_1 \in \mathcal{C}\ell(n)$ *un paravector. Entonces*

$$|x|^2 = x\,\overline{x} = \overline{x}x = (\mathrm{Sc}\, x)^2 + ([x]_1)^2.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
x\,\overline{x} &= \Big(x_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\Big)\Big(x_0 - \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\Big) \\
&= x_0^2 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j e_i e_j + x_0 \sum_{i=1}^{n} x_i e_i - \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\Big) x_0 \\
&= x_0^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 e_i^2 \\
&= x_0^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\
&= |x|^2. \quad \square
\end{aligned}$$

Cuando x es un paravector y $x \neq 0$, el paravector $x^{-1} = \frac{1}{|x|^2}\overline{x}$ es el inverso multiplicativo de x en $\mathcal{C}\ell(n)$:

$$x\left(\frac{\overline{x}}{|x|^2}\right) = \frac{1}{|x|^2}(x\overline{x}) = e_0. \qquad \square$$

Proposición

Para vectores u, v en $\mathcal{C}\ell(n)$,

$$u \cdot v = -\frac{1}{2}(uv + vu), \quad |v|^2 = -v^2.$$

Por lo tanto, dos vectores son otorgonales sólo cuando conmutan.

Demostración.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} u_i e_i \sum_{j=1}^{n} v_j e_j + \sum_{j=1}^{n} v_j e_j \sum_{i=1}^{n} u_i e_i &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_i v_j (e_i e_j + e_j e_i) \\ &= -2\sum_{i=1}^{n} u_i v_i \\ &= -2u \cdot v. \quad \square \end{aligned}$$

Consideramos que $V = \mathbb{R}^n$, tenemos la noción de ortogonalidad de vectores, $u \cdot v = 0$.

Proposición

El reflejo del vector u en el hiperplano $v^\perp$ ortogonal al vector v en $\mathbb{R}^n$ es

$$Refl_v u = -\frac{vuv}{v^2} = \frac{vuv}{|v|^2}$$

Esto dice entre otras cosas, que el producto vuv en el álgebra de Clifford es nuevamente un vector.

Primero tenemos que entender que significa $\mathrm{Refl}_v u$:
Podemos expresar $u = w + rv$ de manera única con $r \in \mathbb{R}$ y $w \in v^\perp$.
Luego

$$\mathrm{Refl}_v u \ = \ w - rv.$$

Encontremos w, r de forma explícita. Si $u = w + rv$, entonces

$$u \cdot v = w \cdot v + r\, v \cdot v = 0 + r|v|^2.$$

Por lo tanto

$$r \;=\; \frac{u \cdot v}{|v|^2},$$

luego

$$w \;=\; u - rv \;=\; u - \frac{u \cdot v}{|v|^2} v.$$

Esta expresión no usa el álgebra de Clifford, se tiene en cualquier espacio vectorial con producto interno.

Ahora podemos demostrar la fórmula para la reflexión en términos de la múltiplicación de Clifford:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Refl}_v(u) &= w - \frac{u \cdot v}{|v|^2} v \\
&= u - 2\frac{u \cdot v}{|v|^2} v \quad \color{red}{(w - rv = (w + rv) - 2rv)} \\
&= -u\frac{v^2}{|v|^2} + \frac{2\,\frac{1}{2}(uv + vu)}{|v|^2} v \\
&= \frac{vuv}{|v|^2} \\
&= -\frac{vuv}{v^2}.
\end{aligned}
$$

Con combinaciones de reflexiones en hiperplanos, se pueden representar todas las rotaciones en $\mathbb{R}^n$ en términos de las operaciones algebraicas en $\mathcal{C}\ell(n)$.

De manera similar se pueden representar composiciones de inversiones en esferas como transformaciones de Möbius

$$f(x) = (ax + b)(cx + d)^{-1}$$

actuando en $\mathbb{R}^{n+1} \cup \{\infty\}$. La composición de dos transformaciones de Möbius es otra más:

$$\begin{gathered}\big(a_2(a_1x + b_1)(c_1x + d_1)^{-1} + b_2\big)\big(c_2(a_1x + b_1)(c_1x + d_1)^{-1} + d_2\big)^{-1} = \\ \big((a_2a_1 + b_2c_1)x + (a_1b_1 + b_2d_1)\big)\big((c_2a_1 + d_2c_1)x + (c_2b_1 + d_2d_1)\big)^{-1}.\end{gathered}$$

Un caso particular de las álgebras de Clifford son los *cuaternios*

$$\mathbb{H} = Cl(2).$$

Se pone $\mathbf{i} = e_1$, $\mathbf{j} = e_2$, $\mathbf{k} = e_1 e_2$. Entonces

$$\mathbf{ij} = \mathbf{k}, \ \mathbf{jk} = \mathbf{i}, \ \mathbf{ki} = \mathbf{j},$$

$$\mathbf{ji} = -\mathbf{k}, \ \mathbf{kj} = -\mathbf{i}, \ \mathbf{ik} = -\mathbf{j},$$

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1.$$

En los cuaternios no hay divisores de cero, cada elemento no cero tiene una inversa multiplicativa.

En la siguiente clase veremos cómo el álgebra de Clifford sirve para generalizar la siguiente propiedad de variable compleja: una función $f(z) = u(z) + iv(z)$ con $z = x + iy$ es *holomorfa* cuando satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Se escribe la "derivada con respecto a $\overline{z}$" como

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{dx} + i\frac{\partial f}{dy}\right).$$

entonces f es holomorfa si y sólo si

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0.$$

Jueves

PARTE II
ANÁLISIS

Resumen de la vez pasada:

Álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell(n)$ con generadores $e_1, e_2, \ldots, e_n$, y las reglas de multiplicación

$$(e_i)^2 = -1 \quad (1 \leq i \leq n),$$
$$e_i e_j = -e_j e_i \quad (i \neq j)$$

Los elementos puros

$$\begin{aligned}
0&: \quad e_0 \text{ (identidad multiplicativa)},\\
1&: \quad e_1,\ e_2,\ e_3,\ \ldots,\ e_n,\\
2&: \quad e_1 e_2,\ e_1 e_3,\ \ldots,\ e_1 e_n,\ e_2 e_3,\ \ldots,\ e_{n-1} e_n,\\
3&: \quad e_1 e_2 e_3,\ e_1 e_2 e_4,\ \ldots,\ e_1 e_2 e_n,\ e_1 e_3 e_4,\ \ldots,\ e_{n-2} e_{n-1} e_n,\\
&\quad\ \ldots\\
n-1&: \quad e_1 e_2 \cdots e_{n-1},\ e_1 \cdots e_{n-2} e_n,\ , e_1 \cdots e_{n-3} e_{n-1} e_n,\ \ldots,\ e_2 e_3 \cdots e_n,\\
n&: \quad e_1 e_2 e_3 \cdots e_n,
\end{aligned}$$

son linealmente independientes, y $\mathcal{C}\ell(n)$ es un espacio vectorial de dimensión 2^n. Se escribe $e_0 = 1$.

Usamos los elementos $e_1, \ldots, e_n$ del álgebra de Clifford para definir operadores diferenciales on funciones de variables x_i:

$$\overline{\partial} \;=\; \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} e_i \;=\; \frac{\partial}{\partial x_0} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} e_i,$$

$$\partial \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{e_i} \;=\; \frac{\partial}{\partial x_0} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} e_i.$$

Se pueden aplicar por la izquierda or por la derecha a funciones que toman valores en el álgebra de Clifford, $f(x) = \sum_{A \in 2^n} f_A(x)\, e_A$,

$$\overline{\partial} f \;=\; \sum_{k=0}^{n} e_k \Big(\frac{\partial f}{\partial x_k}\Big) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \sum_{A} \Big(\frac{\partial f_A}{\partial x_k}\Big)(e_k e_A),$$

$$f\,\overline{\partial} \;=\; \sum_{k=0}^{n} \Big(\frac{\partial f}{\partial x_k}\Big) e_k \;=\; \sum_{k=0}^{n} \sum_{A} \Big(\frac{\partial f_A}{\partial x_k}\Big)(e_A e_k).$$

Por lo general, consideramos funciones de $n+1$ variables $x_0, x_1, \ldots, x_n$ pensadas como paravectores en $\mathcal{C}\ell(n)$: $x = x_0 + x_1 e_1 + \cdots x_n e_n$. Así

$$f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathcal{C}\ell(n)$$

donde cada componente f_A de f es una función real-valuada de $n+1$ variables.

Ilustración. $f(x) = x_0^2 x_2 e_0 + 2x_1 e_1 + (x_0 + x_1^2) e_2$;

$$\begin{aligned}
\overline{\partial} f(x) &= (\partial_0 + \partial_1 e_1 + \partial_2 e_2)(x_0^2 x_2 + 2x_1 e_1 + (x_0 + x_1^2) e_2) \\
&= 2x_0 x_2 + 0e_1 + 1e_2 \\
&\quad + e_1(0e_0 + 2e_1 + 0e_2) \\
&\quad + e_2(x_0^2 + 0e_1 + 0e_2) \\
&= (2x_0 x_2 - 2) + (x_0^2 + 1) e_2.
\end{aligned}$$

El operador Laplaciano en R^{n+1} es

$$\Delta \; = \; \Delta_{n+1} = \; \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

Una función f de clase C^2 tal que $\Delta f = 0$ se llama *armónica*.

Proposición

$\overline{\partial}\,\partial \; = \; \partial\,\overline{\partial} \; = \; \Delta \; (= e_0 \Delta)$.

La composición de operaciones ∂ y $\overline{\partial}$ tiene el siguiente efecto: cuando f es una función escalar-valuada, $\overline{\partial} f$ es una función paravector-valuada:

$$\overline{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial x_0} + \frac{\partial f}{\partial x_1} e_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} e_n,$$

al aplicar ∂ por la izquierda (o por la derecha) a esta función, por causa de la cancelación, el resultado en nuevamente una función escalar.

Demostración. Recordemos que para funciones de clase C^2,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\partial\,\overline{\partial} &= \Big(\frac{\partial}{\partial x_0} e_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} e_k\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x_0} e_0 + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_l} e_l\Big) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} e_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial x_l} e_0\, e_l - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_0} e_k\, e_0 \\
&\quad - \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} e_k\, e_l.
\end{aligned}$$

Se cancelan el segundo y tercer términos. El último es igual a

$$-\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} e_k e_l$$

$$= -\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} e_k^2 - \sum_{k\neq l}\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} e_k e_l$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} e_0 + \sum_{k<l}\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} e_k e_l + \sum_{k>l}\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} e_k e_l$$

Se cancelan los dos últimos sumandos.

Juntos dan la fórmula para $\Delta = \sum_0^n \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$. $\square$

Decimos que una función f de clase C^1 es *mónogénica por la izquierda* cuando

$$\overline{\partial} f = 0.$$

Ilustración. $f(x) = (2x_0^2 - x_1^2 + x_2^2) + 2x_0x_1e_1 + 2x_0x_2e_2.$

$$\begin{aligned}
\overline{\partial} f(x) &= (\partial_0 + \partial_1 e_1 + \partial_2 e_2)((2x_0^2 - x_1^2 + x_2^2) + 2x_0x_1e_1 + 2x_0x_2e_2) \\
&= (4x_0 - 2x_0 - 2x_0) + (2x_1 - 2x_1)e_1 + (2x_2 - 2x_2)e_2 + \\
&\qquad + (0 - 0)e_1e_2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Proposición

Sea $f = \sum_A f_A e_A$ una función $C(n)$-valuada monogénica. Entonces cada componente f_A es una función armónica.

Demostración.

Por hipótesis $\overline{\partial} f = 0$. Por lo tanto

$$\Delta f = \partial(\overline{\partial} f) = \partial 0 = 0.$$

Pero el operador Δ es esencialmente escalar, es decir,

$$\Delta f = \sum_A \Delta f_A e_A = 0,$$

luego $\Delta f_A = 0$ para cada A. $\square$

La suma de dos funciones monogénicas es monogénica, pero el producto no tiene que ser monogénico.

La función identidad $f(x) = x$ no es monogénica,

$$\begin{aligned}
&(\partial_0 + \partial_1 e_1 + \partial_2 e_2)(x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2) \\
&\quad = (1 - 1 - 1) + (0 + 0)e_1 + (0 + 0)e_2 + (0 + 0)e_1 e_2 \\
&\quad = -1 \neq 0.
\end{aligned}$$

Otra forma de ver la relación entre las funciones monogénicas y las armónicas es la siguiente:

Proposición

Sea $h\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ *una función armónica. Entonces la función*

$$f = \partial h$$

es una función monogénica paravector-valuada.

Demostración.

$$\overline{\partial} f = \overline{\partial}\partial h = \Delta h = 0. \quad \square$$

Los polinomios monogénicos más sencillos son las *variables de Fueter*

$$z_k = x_k - x_0 e_k \in \mathcal{C}\ell(n) \quad (1 \leq k \leq n)$$

(son paravectores).

Se relacionan con las derivadas y diferenciales de una forma muy elegante: para cualquier función diferenciable f,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f &= (\overline{\partial} f)\,\mathrm{d}x_0 + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{d}z_k \frac{\partial f}{\partial x_k}. \\ &= (f\overline{\partial})\,\mathrm{d}x_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{\partial} f}{\partial x_k}\,\mathrm{d}z_k. \end{aligned}$$

($\mathrm{d}z_k = \mathrm{d}x_k - \mathrm{d}x_0 e_k$)

Cuando f es monogénica, la aproximación lineal local $df(x)$ es una combinación de las variables de Fueter.

Todos los polinomios monogénicos son combinaciones de unos polinomios especiales llamados *polinomios de Fueter*. La definición requiere considerar todos los productos de variables de Fueter

$$\vec{z}^{\vec{k}} = z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n},$$

consideradas como funciones de x.

Estos productos no son monogénicos. Pero si se consideran como productos de variables a la potencia 1,

$$\begin{aligned} \vec{z}^{\vec{k}} &= z_1 z_1 \cdots z_1 z_2 \cdots z_2 z_3 \cdots z_n \\ &= z_{j_1} z_{j_2} \cdots z_{j_{k_1}} z_{j_{k_1+1}} \cdots z_{j_{k_1+k_2}} \cdots z_{j_{k_1+\cdots k_n}}, \end{aligned}$$

entonces cuando se promedian sobre todas las permutaciones de

$$(j_1,\ j_2,\ \ldots,\ j_{k_1+\cdots k_n}),$$

el resultado es un polinomio homogéneo de grado $|\vec{k}| = k_1 + \cdots + k_n$ que es monogénico.

Teorema

Sea f monogénica por la izquierda en la bola en $\mathbb{R}^{n+1}$ centrada en 0 y con radio r. Entonces f es igual a su "serie de potencias de Fueter"

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{|\vec{k}|=m} \mathcal{P}_{\vec{k}}(x) a_{\vec{k}}$$

con coeficientes constantes $a_{\vec{k}} \in \mathcal{C}\ell(n)$, convergente para cada $|x| < r$.

(Se puede verificar que $\overline{\partial} \sum\sum \mathcal{P}_{\vec{k}}(x) a_{\vec{k}} = \sum\sum (\overline{\partial}\mathcal{P}_{\vec{k}}(x)) a_{\vec{k}}$
$= \sum\sum 0 a_{\vec{k}} = 0$.)

Teorema (de Gauss para $\overline{\partial}$)

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ un dominio acotado con frontera suave de conectividad finita. Sea $\vec{n}(x)$ el vector normal a $\partial\Omega$ apuntando al exterior en $x \in \partial\Omega$. Sean $f, g \in C^1(\overline{\Omega}, \mathcal{C}\ell(n))$ (diferenciables en el interior, continuas hasta la frontera). Entonces

$$\int_{\partial\Omega} f\,\vec{n}\,g\,\mathrm{d}S \;=\; \int_{\Omega} \big((f\overline{\partial})g + f(\overline{\partial}g)\big)\,\mathrm{d}V.$$

De esto, si f es monogénica por la derecha y g es monogénica por la izquierda, entonces

$$\int_{\partial\Omega} f\,\vec{n}\,g\,\mathrm{d}S \;=\; 0. \qquad \text{(Teorema de Cauchy)}$$

El *núcleo de Cauchy* en $\mathbb{R}^{n+1}$ es la función

$$E_n(x) \;=\; \frac{1}{\sigma_n}\,\frac{\overline{x}}{|x|^{n+1}}.$$

($\sigma_n =$ área de la n-esfera en $\mathbb{R}^{n+1}$ de radio 1.)

Proposición

E_n es monogénica, tanto por la izquierda como por la derecha.

Demostración.

Se calcula

$$E_n(x) \;=\; \Big(\frac{-1}{(n-1)\sigma_n}\Big)\,\partial\frac{1}{|x|^{n-1}},$$

luego

$$\overline{\partial}E_n(x) \;=\; \Big(\frac{-1}{(n-1)\sigma_n}\Big)\,\overline{\partial}\partial\frac{1}{|x|^{n-1}} \;=\; \Delta\frac{1}{|x|^{n-1}} = 0,$$

pues $\dfrac{1}{|x|^{n-1}}$ es una función armónica en $\mathbb{R}^{n+1}$. $\square$

El *operador de Cauchy* para funciones $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathcal{C}\ell(n)$ es

$$\mathcal{F}_{\partial\Omega} f(x) \;=\; \int_{\partial\Omega} E_n(y-x)\,\vec{n}(y)\,f(y)\,\mathrm{d}S_y.$$

Teorema

Para cualquier función continua en $\partial\Omega$, la imagen $\mathcal{F}_{\partial\Omega} f$ es monogenica por la izquierda.

Demostración.

Hay que justificar que se puede pasar la derivada a través de la integral. Con esto, tenemos

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}\mathcal{F}_{\Omega} f(x) \;&=\; \overline{\partial}\Big(\int_{\partial\Omega} E_n(y-x)\,\vec{n}(y)\Big)\,f(y)\,\mathrm{d}S_y \\
&=\; \int_{\partial\Omega} \overline{\partial}\Big(E_n(y-x)\,\vec{n}(y)\,f(y)\Big)\,\mathrm{d}S_y \\
&=\; \int_{\partial\Omega} \overline{\partial}\Big(E_n(y-x)\Big)\,\vec{n}(y)\,f(y)\,\mathrm{d}S_y \\
&=\; \int_{\partial\Omega} 0\,\mathrm{d}S_y = 0. \qquad \square
\end{aligned}$$

Teorema (fórmula integral de Cauchy)

Si f es monogénica por la izquierda en Ω, y continua en $\overline{\Omega}$, entonces para cada $x \in \Omega$,

$$f(x) \;=\; \int_{\partial\Omega} E_n(y-x)\, \vec{n}(y)\, f(y)\, \mathrm{d}S_y.$$

Esto se expresa en términos de operadores como

$$F_\Omega(\, f|_{\partial\Omega}\,) \;=\; f|_\Omega.$$

Como consecuencia de la fórmula integral de Cauchy, toda función monogénica está determinada por sus valores en la frontera.

Con estos resultados se puede demostrar que las funciones monogénicas satisfacen muchas propiedades análogas a las propiedades de funciones de Variable Compleja.

Por ejemplo: cuando una sucesión de funciones monogénicas $\{f_k\}$ converge uniformemente a una función en algún dominio, la función límite $f = \lim_k f_k$ también es monogénica.

Una aplicación a la física: Ecuaciones de Maxwell

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 0, \\ \operatorname{div} \vec{H} &= 0, \\ \operatorname{curl} \vec{E} &= i\omega\mu(\vec{H} + \beta \operatorname{curl} \vec{H}), \\ \operatorname{curl} \vec{H} &= -i\omega\epsilon(\vec{E} + \beta \operatorname{curl} \vec{E}), \end{aligned}$$

$\beta, \mu, \varepsilon, \omega$ son constantes positivas, y
$\vec{E}, \vec{H}$ son campos vectoriales complejos.

ω=frecuencia ϵ=permitividad μ=permeabilidad β=quiralidad

Se puede resolver las ecuaciones de Maxwell usando cuaternios complejos $a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ con $a_j \in \mathbb{C}$.

Usaremos variables $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ y ajustar la notación referente a funciones monogénicas, $\vec{\partial} = \partial_1\mathbf{i} + \partial_2\mathbf{j} + \partial_3\mathbf{k}$. (Ahora f es “monogénica” cuando $\vec{\partial} f = 0$.)

Hay operadores integrales que converten soluciones de una ecuación diferencial en soluciones de otra.

$$T_\lambda \colon \{f\colon \quad \vec{\partial} f = 0\} \ \to \ \{g\colon \ (\vec{\partial} + \lambda) g = 0\}$$

Esto dice

$$f \text{ monogénica, } g = T_\lambda f, \ \ \Rightarrow \ \vec{\partial} g + \lambda g = 0.$$

Como conocemos todas las funciones monogénicas, “conocemos” todo $\ker(\vec{\partial} + \lambda)$.

Para las ecuaciones de Máxwell, usamos dos valores de λ a saber, λ_+, λ_-:

$$\lambda_{\pm} = \frac{\omega\sqrt{\epsilon\mu}}{\omega\beta\sqrt{\epsilon\mu} \pm 1}.$$

que corresponden a dos operadores T_+, T_-. Si f_+ y f_- son dos funciones monogénicas arbitrarias, entonces

Teorema

Los campos complejos

$$\vec{E} = \frac{-1}{\sqrt{\mu}}(T_+ f_+ + T_- f_-),$$
$$\vec{H} = \frac{-i}{\sqrt{\epsilon}}(T_+ f_+ - T_- f_-),$$

son soluciones de las ecuaciones de Maxwell. Todas las soluciones son (límites de) combinaciones lineales de soluciones de esta forma.

GRACIAS