Escuela de Verano 2025
Departamento de Matemáticas
Cinvestav–IPN

Proyecto: Optimización de funciones definidas en espacios métricos

Investigador: Dr. David González Sánchez

Resumen

En este proyecto empezamos revisando resultados básicos sobre problemas de optimización para funciones $J : S \to \mathbb{R}$, donde $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Luego veremos cómo generalizar estos resultados cuando $\mathbb{R}^n$ se reemplaza por un espacio normado de dimensión infinita o, de manera más abstracta, por un espacio métrico. Finalmente, se presentarán algunas aplicaciones y algoritmos relacionados.

1. Introducción

Dada la función $J : S \to \mathbb{R}$, el problema de optimización que nos interesa consiste en encontrar $\widehat{s}$ en S tal que

$$J(\widehat{s}) = \inf_{s \in S} J(s). \tag{1}$$

Cuando $\widehat{s}$ existe, se dice que $\widehat{s}$ es un *mínimo global*. Si s' sólo minimiza a J de manera local, es decir,

$$J(s') \leq J(s) \quad \forall s \in U,$$

donde U es una vecindad de s', entonces s' es un *mínimo local*.

Si S es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ y f es continua, entonces el problema (1) tiene un mínimo global. Si además existen las derivadas parciales de primer y segundo orden de f, entonces se tienen condiciones necesarias y suficientes para que $\widehat{s}$ sea un mínimo local o global de (1). En particular, las condiciones necesarias

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\widehat{s}) = 0, \qquad 1 \leq j \leq n, \tag{2}$$

pueden ser útiles para caracterizar mínimos locales o globales mediante un sistema de ecuaciones.

En ocaciones, se tienen restricciones adicionales que debe cumplir la variable s, por ejemplo, de la forma $h(s) = 0$, donde $h : S \to \mathbb{R}$. Bajo ciertas hipótesis, se puede probar que si $\widehat{s}$ es un mínimo local de J, y satisface la restricción $h(\widehat{s}) = 0$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ (conocido como *multiplicador de Lagrange*) tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\widehat{s}) + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_j}(\widehat{s}) = 0, \qquad 1 \leq j \leq n.$$

Estas ecuaciones son análogas a (2). El multiplicador λ puede interpretarse de acuerdo con el contexto del problema de optimización.

Partiendo de estos resultados básicos, en la Sección 2 se incluyen algunas generalizaciones que pueden obtenerse en espacios normados o espacios métricos. En la Sección 3 se incluyen algunas de las multiples aplicaciones de la teoría de optimización, así como algunos algoritmos relacionados.

2. Generalizaciones

2.1 *Existencia de soluciones* (Guler [5]). El problema (1) tiene al menos un mínimo global si, por ejemplo, se satisface alguna de las siguientes hipótesis:

Hipótesis 2.1. S es un espacio métrico compacto y f es semi-continua inferior, o

Hipótesis 2.2. $S = \mathbb{R}^n$, f es semi-continua inferior y coercitiva.

2.2 *Un principio variacional* (Ekeland [4], Hiriart-Urruty [7]) Si en el problema (1) se pide la siguiente

Hipótesis 2.3. S es un espacio métrico completo, f es semi-continua inferior y acotada inferiormente,

entonces se tienen soluciones aproximadas que satisfacen una propiedad conocida como Principio variacional de Ekeland. Este principio tiene distintas aplicaciones; por ejemplo, puede usarse para demostrar el Teorema de punto fijo de Banach.

2.3 *Cálculo de variaciones* (Kielhofer [8]). Sean a, b y $T > 0$ números reales. Considere el conjunto $S = \{x : [0, T] \to \mathbb{R} \mid x \text{ es diferenciable}, \ x(0) = a, \ x(T) = b\}$ y el funcional

$$J[x] = \int_0^T L(t, x(t), x'(t))dt, \qquad x \in S,$$

donde $L : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable. En este caso, (1) se convierte en un problema de Cálculo variaciones. Usando diferenciales de Gateaux (que son una generalización de las derivadas direccionales), se puede probar que una condición necesaria para que $\widehat{x}$ minimice a J es

$$\frac{\partial L}{\partial x}(t, \widehat{x}(t), \widehat{x}'(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial x'}(t, \widehat{x}(t), \widehat{x}'(t)) = 0, \qquad \widehat{x}(0) = a, \ \widehat{x}(T) = b.$$

Esta ecuación diferencial se conoce como ecuación de Euler–Lagrange.

2.4 *Control óptimo* (Hernández-Lerma et al. [6]). Consideremos la ecuación en diferencias

$$x_{t+1} = F(x_t, u_t), \quad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

donde $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Si la condición inicial x_0 está dada, para cada sucesión $\overline{u} = (u_0, u_1, \ldots)$, se tiene otra sucesión $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ tal que el par $(\overline{u}, \overline{x})$ satisface (3). Queremos encontrar una sucesión $\overline{u}$ que minimice

$$J(x_0, \overline{u}) = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t c(x_t, u_t)$$

con $0 < \delta < 1$. Éste es una caso particular de un problema de control óptimo. Una forma de estudiar este tipo de problemas consiste en asociar un multiplicador de Lagrange λ_t para cada restricción en (3).

3. Aplicaciones y algoritmos

3.1 Teorema fundamental del álgebra (Terkelsen [10]).

3.2 La braquistócrona (Balder [2], Coleman [3], Kielhofer [8])

3.3 El teorema espectral (Guler [5])

3.4 Mínimos cuadrados (Luenberger [9])

3.5 El método de Newton (Guler [5])

3.6 El algoritmo de programación dinámica (Hernández-Lerma et al. [6])

3.7 Modelos dinámicos en economía (Acemoglu [1])

Referencias

[1] D. Acemoglu (2009) *Introduction to Modern Economic Growth*, Princeton University Press, Princeton.

[2] E. Balder. (2002) The brachistochrone problem made elementary. www.staff.science.uu.nl/∼balde101/talks/vanbeek.pdf

[3] R. Coleman (2012) A detailed analysis of the brachistochrone problem. https://hal.archives- ouvertes.fr/hal-00446767v2

[4] I. Ekeland (1974) On the variational principle, *J. Math. Anal. Appl.* 47, pp. 324-353.

[5] O. Guler (2010) *Foundations of optimization*, Springer, New York.

[6] O. Hernández-Lerma, L.R. Laura-Guarachi, S. Mendoza-Palacios, and D. González-Sánchez (2023) *An Introduction to Optimal Control Theory: The Dynamic Programming Approach*. Springer.

[7] J.- B. Hiriart-Urruty (1983) A Short Proof of the Variational Principle for Approximate Solutions of a Minimization Problem, *The American Mathematical Monthly* 90, 206-207.

[8] H. Kielhofer (2018) *Calculus of Variations*. Springer.

[9] D.G. Luenberger (1969) *Optimization by vector space methods*, Wiley, New York-London-Sydney.

[10] F. Terkelsen (1976) The fundamental theorem of algebra. *Amer. Math. Monthly* 83, 647.