

*Introducción al
Análisis de Clifford*

Dr. R. Michael Porter K.

*Depto. de Matemáticas
CINVESTAV–Querétaro*

*Escuela de Verano
Cinvestav
2026*

Lunes

LAS ÁLGEBRAS DE CLIFFORD

Motivación

Una integral clásica de una función real:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2 - 1} dx &= \int \frac{1}{(x + 1)(x - 1)} dx \\&= -\frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x - 1} \right) dx \\&= -\frac{1}{2} (\log(x + 1) - \log(x - 1)) \\&= \frac{1}{2} \log \frac{x - 1}{x + 1}\end{aligned}$$

más una constante de integración.

Motivación

Con un cambio de signo en el problema:

$$\int \frac{1}{x^2 + 1} dx,$$

No se puede factorizar el denominador.

Motivación

Con un cambio de signo en el problema:

$$\int \frac{1}{x^2 + 1} dx,$$

No se puede factorizar el denominador. ¿O sí?

Si $i^2 = -1$, entonces $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$.

$$\frac{i}{2} \int \left(\frac{1}{x + i} - \frac{1}{x - i} \right) dx = \frac{i}{2} \log \frac{x + i}{x - i}$$

más una constante de integración.

Motivación

La filosofía general para atacar un problema:

1. Extender el sistema en que trabajamos, de manera que exista una solución al problema, *expresada en términos de este sistema más general*.
2. Estudiar las propiedades del nuevo sistema.
3. Usar este conocimiento para *expresar la solución en términos del sistema original*.

Motivación

Propiedades de números complejos

$$e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta$$

o sea

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2},$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

En la fórmula aparece $(x + i)/(x - i)$, y cuando $x \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\left| \frac{x + i}{x - i} \right| = 1.$$

Esto implica que $(x + i)/(x - i) = e^{i\theta}$ para algun $\theta \in \mathbb{R}$. Entonces resolvemos para x :

Motivación

$$\begin{aligned}x + i &= e^{i\theta}(x - i), \\e^{i\theta}x - x &= i + ie^{i\theta}, \\x &= i \frac{e^{i\theta} + 1}{e^{i\theta} - 1} = i \frac{e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2}}{e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}} \\&= \cot \frac{\theta}{2},\end{aligned}$$

o sea

$$\frac{\theta}{2} = \operatorname{arccot} x.$$

Estos nos da finalmente

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2 + 1} dx &= \frac{i}{2} \log \frac{x + i}{x - i} = \frac{i}{2} \log e^{i\theta} = \frac{i}{2} i\theta = -\frac{\theta}{2} \\&= -\operatorname{arccot} x + \text{constante}\end{aligned}$$

que no lleva números imaginarios.

Motivación

Otro ejemplo: para estudiar las funciones armónicas $u(x, y) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ real-valuadas, es decir $\Delta u = 0$,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Se puede factorizar Δ sobre los complejos pero no sobre los reales:

$$\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Luego se estudian las funciones para las cuales

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \pm i \frac{\partial}{\partial y} \right) f = 0,$$

y usar esa información para hacer deducciones acerca de las funciones armónicas.

Motivación

En la siguiente clase veremos cómo el álgebra de Clifford sirve para generalizar la siguiente propiedad de variable compleja: una función $f(z) = u(z) + iv(z)$ con $z = x + iy$ es *holomorfa* cuando satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Se escribe la “derivada con respecto a $\bar{z}$ ” como

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

entonces f es holomorfa si y sólo si

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Álgebras de Clifford

Las álgebras de Clifford surgen del deseo de **multiplicar** vectores.

Tomemos un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$ con base

$$e_1, e_2, \dots, e_n.$$

Para fijar ideas, queremos extender V a un álgebra sobre los reales, es decir aparte de las reglas de espacio vectorial

$$r(x + y) = rx + ry, \quad (r + s)x = rx + sx, \quad (rs)x = r(sx),$$

se satisfacen las reglas multiplicativas

$$r(xy) = (rx)y = x(ry), \quad (xy)z = x(yz),$$

cuando $r, s \in \mathbb{R}$, mientras que x, y están en el álgebra.

Álgebras de Clifford

Tenemos que definir sumas y productos.

Primero tenemos que entender los **productos de dos vectores básicos**,

$$e_1 e_1, e_1 e_2, e_1 e_3, \dots, e_1 e_n,$$

$$e_2 e_1, e_2 e_2, e_2 e_3, \dots, e_2 e_n,$$

$$e_3 e_1, e_3 e_2, e_3 e_3, \dots, e_3 e_n,$$

$$\vdots$$

$$e_n e_1, e_n e_2, e_n e_3, \dots, e_n e_n,$$

pero estos productos no tienen que ser vectores.

Álgebras de Clifford

Ponemos la regla $e_i e_j = -e_j e_i$ cuando $i \neq j$:

$$\begin{array}{cccccc} e_1^2, & e_1 e_2, & e_1 e_3, & \dots, & e_1 e_n, \\ -e_1 e_2, & e_2^2, & e_2 e_3, & \dots, & e_2 e_n, \\ -e_1 e_3, & -e_2 e_3, & e_3^2, & \dots, & e_3 e_n, \\ & & \vdots & & \\ -e_1 e_n, & -e_2 e_n, & -e_3 e_n, & \dots, & e_n^2. \end{array}$$

También queremos una **identidad multiplicativa** e_0 (no es un vector):

$$e_0 \neq e_i \text{ para } i \geq 1,$$

$$e_0 e_i = e_i e_0 = e_i$$

para todo i . Decimos " $e_0 = 1$ ".

Álgebras de Clifford

Los cuadrados de los e_i podrían definirse de muchas maneras, tomaremos para $i \geq 1$

$$e_i^2 = -e_0 + 0 = -1.$$

Pero como los productos como $e_1 e_2$ no son vectores, tenemos que entender cómo multiplicarlos con otras cosas que ya tenemos, como $(e_1 e_2) e_3$ o $(e_1 e_2)(e_1 e_2)$.

Un producto general a considerarse es

$$e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k},$$

con $0 \leq i_l \leq n$ para $1 \leq l \leq k$ ($k \in \mathbb{N}$).

(Después multiplicaremos sumas de estas cosas.)

Álgebras de Clifford

Regla general: aplicar $e_i^2 = -e_0$ cada vez que se pueda, quitar los factores e_0 , aplicar $e_i e_j = -e_j e_i$ para ordenar los índices:

$$\begin{aligned} e_1 e_3 e_4 e_2 e_3 &= -e_1 e_3 e_4 e_3 e_2 \\ &= e_1 e_4 e_3 e_3 e_2 \\ &= -e_1 e_4 e_0 e_2 \\ &= -e_1 e_4 e_2 \\ &= e_1 e_2 e_4 \end{aligned}$$

Elementos puros: los índices van en orden creciente, sin repeticiones.

Elementos puros

$$0: e_0,$$

$$1: e_1, e_2, e_3, \dots, e_n,$$

$$2: e_1 e_2, e_1 e_3, \dots, e_1 e_n, e_2 e_3, \dots, e_{n-1} e_n,$$

$$3: e_1 e_2 e_3, e_1 e_2 e_4, \dots, e_1 e_2 e_n, e_1 e_3 e_4, \dots, e_{n-2} e_{n-1} e_n,$$

$$\vdots$$

$$n-1: e_1 e_2 \cdots e_{n-1}, e_1 \cdots e_{n-2} e_n, e_1 \cdots e_{n-3} e_{n-1} e_n, \dots, e_2 e_3 \cdots e_n,$$

$$n: e_1 e_2 e_3 \cdots e_n,$$

En el renglón k hay

$$\binom{n}{k} = \frac{k!(n-k)!}{n!}$$

productos, y en total son

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

Álgebras de Clifford

A veces se escribe $e_{\{1,2\}}$ o e_{12} en lugar de $e_1 e_2$, etc. Así para un conjunto $A = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ tal que $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, se tiene

$$e_A = e_{i_1 i_2 \dots i_k} = e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_k}$$

Los elementos del *álgebra de Clifford* $\mathcal{C}\ell(n)$ son sumas con coeficientes reales

$$x = \sum_A x_A e_A$$

que se suman término por término:

$$\sum_{A \in 2^n} x_A e_A + \sum_{A \in 2^n} x'_A e_A = \sum_{A \in 2^n} (x_A + x'_A) e_A$$

y se multiplican usando la ley distributiva:

$$\left(\sum_{A \in 2^n} x_A e_A \right) \left(\sum_{A \in 2^n} x'_A e_A \right) = \sum_{B \in 2^n} y_B e_B$$

donde es un poco complicado escribir una fórmula para y_B .

Álgebras de Clifford

Claro, escribimos sólo $-e_1 e_2$ en lugar de

$$0e_0 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 + (-1)e_1 e_2 + 0e_1 e_3 + 0e_2 e_3 + 0e_1 e_2 e_3.$$

Las álgebras de Clifford tienen variantes, por ejemplo en $\mathcal{Cl}_{p,q}$ se usa $e_i^2 = 1$ para $1 \leq i \leq p$, y $e_i^2 = -1$ para $p+1 \leq i \leq p+q$.
Así

$$\mathcal{Cl}_{0,n} = \mathcal{Cl}(n).$$

Otro variante es con $e_i^2 = 0$, que se llama el *álgebra exterior*, y se escribe la multiplicación como $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$.

Álgebras de Clifford

Los elementos de las diversas álgebras $\mathcal{C}\ell_{p,q}$ para $p + q = n$ fijo son los mismos, que forman un espacio vectorial de dimensión 2^n ,
pero las multiplicaciones son distintas.

En $\mathcal{C}\ell_{0,n}$ se tiene

$$(1 + e_1)(1 - e_1) = 1 - e_1^2 = 2,$$

pero en $\mathcal{C}\ell_{n,0}$ se tiene

$$(1 + e_1)(1 - e_1) = 1 - e_1^2 = 0.$$

Vamos a trabajar sólo en $\mathcal{C}\ell(n) = \mathcal{C}\ell_{0,n}$.

Álgebras de Clifford

escalar (0-vector): múltiplo real de e_0 .

vector (1-vector): combinación lineal de $e_1, e_2, \dots, e_n$

pseudoescalar (n-vector): múltiplo real de $e_1 e_2 \cdots e_n$

paravector: suma de un escalar y un vector

Un elemento general del álgebra de Clifford es *mixto*, puede llevar productos básicos de distintos grados:

$$\begin{aligned}x &= \sum_A x_A e_A \\&= \sum_{\#A=0} x_A e_A + \sum_{\#A=1} x_A e_A + \cdots + \sum_{\#A=n} x_A e_A \\&= [x]_0 \quad + [x]_1 \quad + \cdots \quad + [x]_n.\end{aligned}$$

Álgebras de Clifford

Parte escalar:

$$\text{Sc } x = [x]_0.$$

Conjugado:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \sum_{k=0}^n (-1)^{k(k+1)/2} [x]_k \\ &= [x]_0 - [x]_1 - [x]_2 + [x]_3 + [x]_4 - [x]_5 - \cdots.\end{aligned}$$

Cuando x es paravector,

$$(1/2)(x + \bar{x}) = \text{Sc } x,$$

Se tiene $\bar{e}_0 = e_0$, $\bar{e}_i = -e_i$ ($i \geq 1$), además

$$\overline{(rx)} = r\bar{x}, \quad \overline{(\bar{x})} = x, \quad \overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y}, \quad \overline{(xy)} = \bar{y} \bar{x}.$$

Álgebras de Clifford y geometría

Las operaciones de álgebra de Clifford se relacionan con propiedades geométricas como longitud y ángulo:

$$|x| = \left(\sum_A (x_A)^2 \right)^{1/2},$$

$$x \cdot y = \sum_A x_A y_A.$$

Pero hay que tener cuidado: Sea $x = e_1 + e_2 e_3$ en $\mathcal{Cl}(3)$, luego $|x| = \sqrt{2}$ y $\bar{x} = -e_1 - e_2 e_3 = -x$, luego

$$\begin{aligned} x \bar{x} &= -(e_1 + e_2 e_3)^2 \\ &= -(-1 + e_1 e_2 e_3 + e_2 e_3 e_1 + e_2 e_3 e_2 e_3) \\ &= 2 + 2e_1 e_2 e_3 \\ &\neq 2 = |x|^2. \end{aligned}$$

$$\mathcal{Cl}(1) \cong \mathbb{C}$$

Álgebras de Clifford y geometría

Proposición

Sean $x, y \in \mathcal{C}\ell(n)$. Entonces

$$x \cdot y = \text{Sc}(x \bar{y}) = \text{Sc}(\bar{x} y),$$

$$|x|^2 = \text{Sc}(x \bar{x}) = \text{Sc}(\bar{x} x).$$

Muchas más propiedades buenas se tienen para los **paravectores**

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

Álgebras de Clifford y geometría

Proposición

Sea $x = \text{Sc } x + [x]_1 \in \mathcal{C}\ell(n)$ un paravector. Entonces

$$|x|^2 = x \bar{x} = \bar{x}x = (\text{Sc } x)^2 + ([x]_1)^2.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} x \bar{x} &= \left(x_0 + \sum_{i=1}^n x_i e_i\right) \left(x_0 - \sum_{i=1}^n x_i e_i\right) \\ &= x_0^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j e_i e_j + x_0 \sum_{i=1}^n x_i e_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) x_0 \\ &= x_0^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2 e_i^2 \\ &= x_0^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ &= |x|^2. \quad \square \end{aligned}$$

Álgebras de Clifford y geometría

Cuando x es un paravector y $x \neq 0$, el paravector $x^{-1} = \frac{1}{|x|^2} \bar{x}$ es el inverso multiplicativo de x en $\mathcal{Cl}(n)$:

$$x \left(\frac{\bar{x}}{|x|^2} \right) = \frac{1}{|x|^2} (x\bar{x}) = e_0. \quad \square$$

Proposición Para vectores u, v en $\mathcal{Cl}(n)$,

$$u \cdot v = -\frac{1}{2}(uv + vu), \quad |v|^2 = -v^2.$$

Por lo tanto, dos vectores son ortogonales sólo cuando anticonmutan.

Demostración.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n u_i e_i \sum_{j=1}^n v_j e_j + \sum_{j=1}^n v_j e_j \sum_{i=1}^n u_i e_i &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i v_j (e_i e_j + e_j e_i) \\ &= -2 \sum_{i=1}^n u_i v_i \\ &= -2u \cdot v. \quad \square \end{aligned}$$

Álgebras de Clifford y geometría

Consideramos que $V = \mathbb{R}^n$, tenemos la noción de ortogonalidad de vectores, $u \cdot v = 0$.

Proposición

El reflejo del vector u en el hiperplano $v^\perp$ ortogonal al vector v en $\mathbb{R}^n$ es

$$\text{Refl}_v u = -\frac{vuv}{v^2} = \frac{vuv}{|v|^2}$$

Esto dice entre otras cosas, que el producto vuv en el álgebra de Clifford es nuevamente un vector.

Antes de probarlo, tenemos que recordar qué significa $\text{Refl}_v u$:

Podemos expresar $u = w + rv$ de manera única con $r \in \mathbb{R}$ y $w \in v^\perp$.
Luego

$$\text{Refl}_v u = w - rv.$$

Álgebras de Clifford y geometría

Encontremos w, r de forma explícita. Si $u = w + rv$, entonces

$$u \cdot v = w \cdot v + r v \cdot v = 0 + r|v|^2.$$

Por lo tanto

$$r = \frac{u \cdot v}{|v|^2},$$

luego

$$\text{Refl}_v u = u - rv = u - \frac{u \cdot v}{|v|^2} v.$$

Esta expresión no usa el álgebra de Clifford, se tiene en cualquier espacio vectorial con producto interno.

Álgebras de Clifford y geometría

Ahora podemos demostrar la fórmula para la reflexión en términos de la multiplicación de Clifford:

$$\begin{aligned}\text{Refl}_v(u) &= w - \frac{u \cdot v}{|v|^2} v \\&= u - 2 \frac{u \cdot v}{|v|^2} v \quad (w - rv = (w + rv) - 2rv) \\&= -u \frac{v^2}{|v|^2} + \frac{2 \frac{1}{2}(uv + vu)}{|v|^2} v \\&= \frac{vuv}{|v|^2} \\&= -\frac{vuv}{v^2}.\end{aligned}$$

Álgebras de Clifford y geometría

Con combinaciones de reflexiones en hiperplanos, se pueden representar todas las rotaciones en $\mathbb{R}^n$ en términos de las operaciones algebraicas en $\mathcal{Cl}(n)$.

De manera similar se pueden representar composiciones de inversiones en esferas como transformaciones de Möbius

$$f(x) = (ax + b)(cx + d)^{-1}$$

actuando en $\mathbb{R}^{n+1} \cup \{\infty\}$. La composición de dos transformaciones de Möbius es otra más:

$$\begin{aligned} & (a_2(a_1x + b_1)(c_1x + d_1)^{-1} + b_2)(c_2(a_1x + b_1)(c_1x + d_1)^{-1} + d_2)^{-1} = \\ & ((a_2a_1 + b_2c_1)x + (a_1b_1 + b_2d_1))((c_2a_1 + d_2c_1)x + (c_2b_1 + d_2d_1))^{-1}. \end{aligned}$$

Un caso particular de las álgebras de Clifford son los *cuaternios*

$$\mathbb{H} = Cl(2).$$

Se pone $\mathbf{i} = e_1$, $\mathbf{j} = e_2$, $\mathbf{k} = e_1 e_2$. Entonces

$$\mathbf{ij} = \mathbf{k}, \mathbf{jk} = \mathbf{i}, \mathbf{ki} = \mathbf{j},$$

$$\mathbf{ji} = -\mathbf{k}, \mathbf{kj} = -\mathbf{i}, \mathbf{ik} = -\mathbf{j},$$

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1.$$

En los cuaternios no hay divisores de cero, cada elemento no cero tiene una inversa multiplicativa.

Martes

ANÁLISIS

Resumen de la vez pasada:

Álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell(n)$ con generadores $e_1, e_2, \dots, e_n$, y las reglas de multiplicación

$$(e_i)^2 = -1 \quad (1 \leq i \leq n),$$

$$e_i e_j = -e_j e_i \quad (i \neq j)$$

Los elementos puros

0: e_0 (identidad multiplicativa),

1: $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$,

2: $e_1 e_2, e_1 e_3, \dots, e_1 e_n, e_2 e_3, \dots, e_{n-1} e_n$,

3: $e_1 e_2 e_3, e_1 e_2 e_4, \dots, e_1 e_2 e_n, e_1 e_3 e_4, \dots, e_{n-2} e_{n-1} e_n$,

...

$n-1$: $e_1 e_2 \cdots e_{n-1}, e_1 \cdots e_{n-2} e_n, e_1 \cdots e_{n-3} e_{n-1} e_n, \dots, e_2 e_3 \cdots e_n$,

n : $e_1 e_2 e_3 \cdots e_n$,

son linealmente independientes, y $\mathcal{C}\ell(n)$ es un espacio vectorial de dimensión 2^n , además tiene una multiplicación. Se escribe $e_0 = 1$.

Operadores de Cauchy-Riemann

Usamos los elementos $e_1, \dots, e_n$ del álgebra de Clifford para definir **operadores diferenciales** en funciones de variables x_i :

$$\begin{aligned}\bar{\partial} &= \sum_{i=0}^n e_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_0} + \sum_{i=1}^n e_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \\ \partial &= \sum_{k=0}^n \bar{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_0} - \sum_{i=1}^n e_i \frac{\partial}{\partial x_i}.\end{aligned}$$

Se pueden aplicar por la izquierda o por la derecha a funciones que toman valores en el álgebra de Clifford, $f(x) = \sum_{A \in 2^n} f_A(x) e_A$,

$$\begin{aligned}\bar{\partial} f &= \sum_{i=0}^n e_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=0}^n \sum_A \left(\frac{\partial f_A}{\partial x_i} \right) (e_i e_A), \\ f \bar{\partial} &= \sum_{i=0}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) e_i = \sum_{i=0}^n \sum_A \left(\frac{\partial f_A}{\partial x_i} \right) (e_A e_i).\end{aligned}$$

Operadores de Cauchy-Riemann

Por lo general, consideramos funciones de $n + 1$ variables $x_0, x_1, \dots, x_n$ pensadas como paravectores en $\mathcal{Cl}(n)$: $x = x_0 + x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$. Así

$$f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathcal{Cl}(n)$$

donde cada componente f_A de f es una función real-valuada de $n + 1$ variables.

Ilustración. $f(x) = x_0^2 x_2 e_0 + 2x_1 e_1 + (x_0 + x_1^2) e_2 + e_1 e_2$;

$$\begin{aligned}\bar{\partial} f(x) &= (\partial_0 + \partial_1 e_1 + \partial_2 e_2)(x_0^2 x_2 e_0 + 2x_1 e_1 + (x_0 + x_1^2) e_2 + e_1 e_2) \\ &= 2x_0 x_2 + 0e_1 + 1e_2 + 0e_1 e_2 \\ &\quad + e_1(0e_0 + 2e_1 + 2x_1 e_2 + 0e_1 e_2) \\ &\quad + e_2(x_0^2 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_1 e_2) \\ &= (2x_0 x_2 - 2) + (x_0^2 + 1)e_2 + 2x_1 e_1 e_2.\end{aligned}$$

Operadores de Cauchy-Riemann

En $\mathcal{C}\ell(2)$, con $f = f(x_0, x_1, x_2) = f_0 + f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_{12} e_1 e_2$,

$$\begin{aligned}\bar{\partial}f &= (\partial_0 + \partial_1 e_1 + \partial_2 e_2)(f_0 + f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_{12} e_1 e_2) \\&= \partial_0 f_0 + \partial_0 f_1 e_1 + \partial_0 f_2 e_2 + \partial_0 f_{12} e_1 e_2 \\&\quad + \partial_1 f_0 e_1 + \partial_1 f_1 e_1 e_1 + \partial_1 f_2 e_1 e_2 + \partial_1 f_{12} e_1 e_1 e_2 \\&\quad + \partial_2 f_0 e_2 + \partial_2 f_1 e_2 e_1 + \partial_2 f_2 e_2 e_2 + \partial_2 f_{12} e_2 e_1 e_2 \\&= (\partial_0 f_0 - \partial_1 f_1 - \partial_2 f_2) + (\partial_0 f_1 + \partial_1 f_0 + \partial_2 f_{12})e_1 \\&\quad + (\partial_0 f_2 - \partial_1 f_{12} + \partial_2 f_0)e_2 + (\partial_0 f_{12} + \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1)e_1 e_2.\end{aligned}$$

$$\bar{\partial}f = 0 \iff$$

4 ecuaciones en derivadas parciales para 4 funciones de 3 variables

Operadores de Cauchy-Riemann

El operador Laplaciano en R^{n+1} es

$$\Delta = \Delta_{n+1} = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

Una función f de clase C^2 tal que $\Delta f = 0$ se llama *armónica*.

Proposición

$$\bar{\partial} \partial = \partial \bar{\partial} = \Delta (= e_0 \Delta).$$

La composición de operaciones ∂ y $\bar{\partial}$ tiene el siguiente efecto: cuando f es una función escalar-valuada, $\bar{\partial} f$ es una función paravector-valuada:

$$\bar{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial x_0} + \frac{\partial f}{\partial x_1} e_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} e_n,$$

al aplicar ∂ por la izquierda (o por la derecha) a esta función, por causa de la cancelación, el resultado es nuevamente una función escalar.

Operadores de Cauchy-Riemann

Demostración. Recordemos que para funciones de clase C^2 ,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\partial \bar{\partial} &= \left(\frac{\partial}{\partial x_0} e_0 - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} e_i \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_0} e_0 + \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} e_j \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} e_0 + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial x_j} e_0 e_j - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_0} e_i e_0 \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} e_i e_j.\end{aligned}$$

Se cancelan el **segundo y tercer** términos. El último es igual a

Operadores de Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} e_i e_j \\ &= - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} e_i^2 - \sum_{i \neq j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} e_i e_j \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} e_0 + \sum_{i < j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} e_i e_j + \sum_{i > j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} e_i e_j \end{aligned}$$

Se cancelan los dos últimos sumandos.

Juntos dan la fórmula para $\Delta = \sum_0^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. $\square$

Operadores de Cauchy-Riemann

Decimos que una función f de clase C^1 es *monogénica por la izquierda* cuando

$$\bar{\partial}f = 0.$$

Ilustración. $f(x) = (2x_0^2 - x_1^2 + x_2^2) + 2x_0x_1e_1 + 2x_0x_2e_2$.

$$\begin{aligned}\bar{\partial}f(x) &= (\partial_0 + \partial_1e_1 + \partial_2e_2)((2x_0^2 - x_1^2 + x_2^2) + 2x_0x_1e_1 + 2x_0x_2e_2) \\ &= (4x_0 - 2x_0 - 2x_0) + (2x_1 - 2x_1)e_1 + (2x_2 - 2x_2)e_2 + \\ &\quad + (0 - 0)e_1e_2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Operadores de Cauchy-Riemann

Proposición

Sea $f = \sum_A f_A e_A$ una función $C(n)$ -valuada monogénica por la izquierda. Entonces cada componente f_A es una función armónica.

Demostración.

Por hipótesis $\bar{\partial}f = 0$. Por lo tanto

$$\Delta f = \partial(\bar{\partial}f) = \partial 0 = 0.$$

Pero el operador Δ es esencialmente escalar, es decir,

$$\Delta f = \sum_A \Delta f_A e_A = 0,$$

luego $\Delta f_A = 0$ para cada A . $\square$

Operadores de Cauchy-Riemann

La suma de dos funciones monogénicas es monogénica, pero el producto no tiene que ser monogénico.

La función identidad $f(x) = x$ no es monogénica para $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} &(\partial_0 + \partial_1 e_1 + \partial_2 e_2)(x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2) \\ &= (1 - 1 - 1) + (0 + 0)e_1 + (0 + 0)e_2 + (0 + 0)e_1 e_2 \\ &= -1 \neq 0. \end{aligned}$$

Polinomios de Fueter

Los polinomios monogénicos más sencillos son las **variables de Fueter**

$$z_i = z_i(x) = x_i - x_0 e_i \in \mathcal{C}\ell(n) \quad (1 \leq i \leq n)$$

(son paravectores).

Se relacionan con las derivadas y diferenciales de una forma muy elegante: como $dz_i = dx_i - dx_0 e_i$, se tiene para cualquier función diferenciable f ,

$$\begin{aligned} df &= (\bar{\partial}f) dx_0 + \sum_{i=1}^n dz_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \\ &= (f\bar{\partial}) dx_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\bar{\partial}f}{\partial x_i} dz_i. \end{aligned}$$

Cuando f es monogénica, la aproximación lineal local $df(x)$ es una combinación de las variables de Fueter.

Polinomios de Fueter

Todos los polinomios monogénicos son combinaciones de unos polinomios especiales llamados *polinomios de Fueter*. La definición requiere considerar todos los **productos de variables de Fueter**

$$\vec{z}^{\vec{k}} = z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n},$$

consideradas como funciones de x .

Estos productos no son monogénicos. Pero si se consideran como productos de variables a la potencia 1,

$$\begin{aligned}\vec{z}^{\vec{k}} &= z_1 z_1 \cdots z_1 z_2 \cdots z_2 z_3 \cdots z_n \\ &= z_{j_1} z_{j_2} \cdots z_{j_{k_1}} z_{j_{k_1}+1} \cdots z_{j_{k_1}+k_2} \cdots z_{j_{k_1+\cdots k_n}},\end{aligned}$$

entonces cuando se promedian sobre todas las permutaciones de

$$(j_1, j_2, \dots, j_{k_1+\cdots k_n}),$$

el resultado es un polinomio homogéneo de grado $|\vec{k}| = k_1 + \cdots + k_n$ que es **monogénico**.

Teorema

Sea f monogénica por la izquierda en la bola en $\mathbb{R}^{n+1}$ centrada en 0 y con radio r . Entonces f es igual a su “serie de potencias de Fueter”

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{|\vec{k}|=m} \mathcal{P}_{\vec{k}}(x) a_{\vec{k}}$$

con coeficientes constantes $a_{\vec{k}} \in \mathcal{C}(n)$, convergente para cada $|x| < r$.

(Se puede verificar que $\bar{\partial} \sum \sum \mathcal{P}_{\vec{k}}(x) a_{\vec{k}} = \sum \sum (\bar{\partial} \mathcal{P}_{\vec{k}}(x)) a_{\vec{k}} = \sum \sum 0 a_{\vec{k}} = 0$.)

Construcción de funciones monogénicas

Otra forma de ver la relación entre las funciones monogénicas y las armónicas es la siguiente:

Proposición

Sea $h: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ una función armónica. Entonces la función

$$f = \partial h$$

es una función *monogénica* paravector-valuada.

Demostración.

$$\bar{\partial} f = \bar{\partial} \partial h = \Delta h = 0. \quad \square$$

Armónicos esféricos

Una muy conocida forma de construir polinomios armónicos es de los **armónicos esféricos** en $\mathbb{R}^n$.

En $\mathbb{R}^3$ tienen la fórmula

$$U_{n,m}^{\pm}(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^n P_n^m(\cos \theta) \Phi_m^{\pm}(\varphi).$$

$$x = (x_0, x_1, x_2) = (r \cos \theta, r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi),$$

$$P_n^m(t) = \text{funciones de Legendre } (0 \leq m \leq n),$$

$$\Phi_m^+(\varphi) = \cos m\varphi, \quad \Phi_m^-(\varphi) = \sin m\varphi.$$

$U_{n,m}^{\pm}(\mathbf{x})$ es un polinomio homogéneo en x de grado n :

$$U_{n,m}^{\pm}(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^n U_{n,m}^{\pm}(\mathbf{x})$$

Son funciones armónicas real-valuadas.

Armónicos esféricos

Los armónicos esféricos son importantes porque las restricciones a la bola unitaria $\mathbb{B} = \{|x| < 1\}$ forman una base ortogonal del subespacio de $L^2(\mathbb{B})$ formado de las funciones armónicas.

Esta implica que cualquier función armónica u , cuadrado-integrable puede aproximarse por combinaciones lineales de armónicos esféricos, de hecho se representa por una serie convergente

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\pm} c_{n,m}^{\pm} U_{n,m}^{\pm}.$$

Se pueden encontrar los coeficientes mediante los productos escalares en el espacio de Hilbert,

$$c_{n,m}^{\pm} = \frac{1}{\|U_{n,m}^{\pm}\|^2} \langle u, U_{n,m}^{\pm} \rangle.$$

Armónicos esféricos

Con las funciones armónicas real-valuadas se puede construir una base de las funciones monogénicas cuaternio-valuadas,

$$\partial U_{n+1,m}^{\pm} \quad (0 \leq m \leq n+1).$$

con $\partial = \partial_0 + \mathbf{i}\partial_1 + \mathbf{j}\partial_2 + \mathbf{k}\partial_3$ que da lo mismo que $\partial_0 + \mathbf{i}\partial_1 + \mathbf{j}\partial_2$ porque los armónicos esféricos no dependen de x_3 .

Resulta que esto da una base ortogonal para las funciones monogénicas que toman valores en $\mathbb{R} \oplus \mathbf{i}\mathbb{R} \oplus \mathbf{j}\mathbb{R} \subseteq \mathbb{H}$, luego multiplicando por $\mathbf{k}$ se pueden agregar más elementos para obtener una base para las funciones monogénicas $\mathbb{H}$ -valuadas de 3 variables reales.

Análisis Cuaterniónico

Hay sistemas diferentes según las dimensiones del dominio y el contradominio de las funciones para las cuales se quieren definir una noción de “monogénico”. Los casos

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

pueden estudiarse por medio de los cuaternios. El caso $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ también es interesante.

Miércoles

TEOREMAS INTEGRALES

Integrales de Cauchy

Un resultado fundamental en la geometría diferencial es el **Teorema de Stokes**,

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega,$$

para $(n - 1)$ -formas diferenciales en variedades Ω n -dimensionales.

Se simplifica mucho cuando Ω es un abierto en el espacio euclidiano, y cuando ω tiene alguna forma particular.

Por ejemplo, para dominios de Jordan Ω en $\mathbb{R}^2$, $\partial\Omega$ una curva simple y diferenciable,

$$\int_{\partial\Omega} P dx + Q dy = \iint_{\Omega} (Q_y - P_x) dx dy.$$

Integrales de Cauchy

Teorema (de Gauss para $\bar{\partial}$)

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ un dominio acotado con frontera suave de conectividad finita. Sea $\vec{n}(x)$ el vector normal a $\partial\Omega$ apuntando al exterior en $x \in \partial\Omega$. Sean $f, g \in C^1(\bar{\Omega}, \mathcal{C}(n))$ (diferenciables en el interior, continuas hasta la frontera). Entonces

$$\int_{\partial\Omega} f \vec{n} g \, dS = \int_{\Omega} ((f\bar{\partial})g + f(\bar{\partial}g)) \, dV.$$

¡Notar la multiplicación de Clifford en los integrandos!

De esto, si f es monogénica por la derecha y g es monogénica por la izquierda, entonces

$$\int_{\partial\Omega} f \vec{n} g \, dS = 0. \quad (\text{Teorema de Cauchy})$$

Integrales de Cauchy

El *núcleo de Cauchy* en $\mathbb{R}^{n+1}$ es la función

$$E_n(x) = \frac{1}{\sigma_n} \frac{\bar{x}}{|x|^{n+1}}.$$

(σ_n = área de la n -esfera en $\mathbb{R}^{n+1}$ de radio 1.)

Proposición

E_n es monogénica, tanto por la izquierda como por la derecha.

Demostración.

Se calcula

$$E_n(x) = \left(\frac{-1}{(n-1)\sigma_n} \right) \partial \frac{1}{|x|^{n-1}},$$

luego

$$\bar{\partial} E_n(x) = \left(\frac{-1}{(n-1)\sigma_n} \right) \bar{\partial} \partial \frac{1}{|x|^{n-1}} = \Delta \frac{1}{|x|^{n-1}} = 0,$$

pues $\frac{1}{|x|^{n-1}}$ es una función armónica en $\mathbb{R}^{n+1}$. $\square$

Integrales de Cauchy

El *operador de Cauchy* para funciones $f: \partial\Omega \rightarrow \mathcal{C}(n)$ es

$$\mathcal{F}_{\partial\Omega} f(x) = \int_{\partial\Omega} E_n(y-x) \vec{n}(y) f(y) dS_y \quad (x \in \Omega).$$

Teorema

Dada f continua en $\partial\Omega$, la imagen $\mathcal{F}_{\partial\Omega} f$ es monogénica por la izquierda.

Demostración.

Hay que justificar que se puede pasar la derivada a través de la integral.

Con esto, tenemos

$$\begin{aligned} (\bar{\partial} \mathcal{F}_{\Omega} f)(x) &= \bar{\partial}_x \left(\int_{\partial\Omega} E_n(y-x) \vec{n}(y) f(y) dS_y \right) \\ &= \int_{\partial\Omega} \bar{\partial}_x \left(E_n(y-x) \vec{n}(y) f(y) \right) dS_y \\ &= \int_{\partial\Omega} \bar{\partial}_x \left(E_n(y-x) \right) \vec{n}(y) f(y) dS_y \\ &= \int_{\partial\Omega} 0 dS_y = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Integrales de Cauchy

Teorema (fórmula integral de Cauchy)

Si f es monogénica por la izquierda en Ω , y continua en $\overline{\Omega}$, entonces para cada $x \in \Omega$,

$$f(x) = \int_{\partial\Omega} E_n(y-x) \vec{n}(y) f(y) dS_y.$$

Esto se expresa en términos de operadores como

$$F_{\Omega}(f|_{\partial\Omega}) = f|_{\Omega}.$$

Como consecuencia de la fórmula integral de Cauchy,

Toda función monogénica está determinada por sus valores en la frontera.

Con estos resultados se puede demostrar que las funciones monogénicas satisfacen muchas propiedades análogas a las propiedades de funciones de Variable Compleja.

Por ejemplo: cuando una sucesión de funciones monogénicas $\{f_k\}$ converge uniformemente a una función en algún dominio, la función límite $f = \lim_k f_k$ también es monogénica.

(La demostración de que las funciones monogénicas se expresan localmente como series en polinomios de Fueter también depende de la fórmula integral de Cauchy.)

Jueves

APLICACIONES

¿Cómo calcular una imagen variable de un objeto en movimiento?

Traslación: simplemente sumar vectores



Rotación: hay muchas posibilidades.

Cada isometría de $\mathbb{R}^3$ que fija el origen es rotación alrededor de un único eje. Esta rotación se describe con tres parámetros reales.

Si se usan herramientas con más de tres parámetros, tiene que haber una redundancia (relación entre los parámetros.)

Animación 3D

Una matriz de rotación es un elemento de $SO(3)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Las relaciones entre las 9 entradas son dadas por ser A ortogonal:

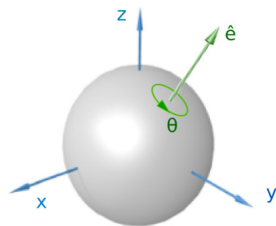
$$A A^t = I$$

que son 6 ecuaciones (y aparte $\det A \neq -1$).

Multiplicación de una matriz por un vector: 9 multiplicaciones de números reales.

Animación 3D

Eje y ángulo de Euler: El eje de rotación lleva dos parámetros reales, y hay un ángulo de rotación.



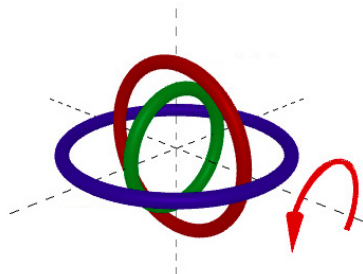
Desventajas:

- ▶ Cuando el ángulo de rotación es cero, el eje no está definido.
- ▶ No es fácil combinar dos rotaciones sucesivas.

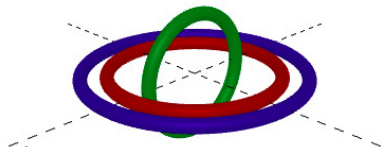
Animación 3D

Fijando tres ejes ortogonales dentro del objeto, un enfoque es de describir las direcciones en que se apuntarán estos tres ejes después de la rotación.

Ángulos de Euler: Los ángulos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ que hacen los tres ejes del objeto con respecto a los ejes x_1, x_2, x_3 . Las rotaciones en los planos ortogonales x_2x_3, x_1x_3, x_1x_2 mueven los ejes del objeto a los ejes de coordenadas.



Bloqueo del cardán
(gimbal lock)



Animación 3D

Se pueden parametrizar las a_{ij} de $A \in SO(3)$ en términos de funciones trigonométricas de tres ángulos.

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 & \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_3 & \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_3 \\ \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 & \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 + \cos \alpha_1 \cos \alpha_3 & \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 - \cos \alpha_1 \sin \alpha_3 \\ -\sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 \sin \alpha_3 & \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 \end{pmatrix}$$

Dado que es función periódica en $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, define una función de un toro de dimensión 3 a $SO(3)$. Tal función continua y regular no existe.

Interpolación: El espacio de rotaciones $SO(3)$ no es espacio lineal. ¿Cómo encontrar una curva natural que lleva de una rotación a otra?

Expresando las **rotaciones como cuaternios unitarios** tiene ventajas:

- ▶ La composición de rotaciones es más rápida y más estable numéricamente.
- ▶ Es más sencillo extraer el eje y el ángulo de rotación.
- ▶ No se presenta el bloqueo del cardán.
- ▶ Hay un algoritmo (SLERP) de interpolación entre dos puntos de S^3 .

Animación 3D

$S^0 = \{+1, -1\}$	es un grupo
$S^1 = \{e^{i\theta}\}$	es un grupo
S^2	no es un grupo
$S^3 = \{q \in \mathbb{H}: q = 1\}$	es un grupo

La relación entre las álgebras de Clifford y las formas cuadráticas da lugar a resultados de teoría de números.

Hurwitz usó el anillo de cuaternios enteros, y cuaternios enteros congruentes a $1/2$ módulo $\mathbb{Z}$ para probar el **teorema de Lagrange**: todo entero positivo es suma de no más de cuatro cuadrados.

La relación entre las álgebras de Clifford y las formas cuadráticas da lugar a resultados de teoría de números.

Hurwitz usó el anillo de cuaternios enteros, y cuaternios enteros congruentes a $1/2$ módulo $\mathbb{Z}$ para probar el **teorema de Lagrange**: todo entero positivo es suma de no más de cuatro cuadrados.

El grupo cuaterniónico $\{\pm 1, \pm e_1, \pm e_2, \pm e_3\}$ es subgrupo del **grupo del cubo de Rubik**.

Los **espinores reales** en tres dimensiones se identifican con cuaternios.

En la ingeniería de transmisión de radio multi-antena, se usa la **codificación de Alamouti** basado en cuaternios, para desenredar señales transmitidas por un par de antenas. Si se pierde la señal de una antena se puede defender con la señal de la otra.

Se usan cuaternios para representar datos complejos en **redes neuronales** como pesos, inputs, activaciones, etc., de forma compacta.

- ▶ Redes neuronales convolucionales
- ▶ Redes neurales recurrentes
- ▶ Redes auto-atentas
- ▶ Redes de memoria de plazo largo-corto
- ▶ Redes residuales

Hay estudios que indican que este enfoque funciona mejor que las redes neuronales real-valuadas.

Una aplicación a la física: Ecuaciones de Maxwell

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0,$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0,$$

$$\operatorname{curl} \vec{E} = i\omega\mu(\vec{H} + \beta \operatorname{curl} \vec{H}),$$

$$\operatorname{curl} \vec{H} = -i\omega\epsilon(\vec{E} + \beta \operatorname{curl} \vec{E}),$$

$\beta, \mu, \epsilon, \omega$ son constantes positivas, y
 $\vec{E}, \vec{H}$ son campos vectoriales **complejos**.

ω =frecuencia ϵ =permitividad μ =permeabilidad β =quiralidad

Ecuaciones de Maxwell

Se puede resolver las ecuaciones de Maxwell usando **cuaternios complejos** $a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ con $a_j \in \mathbb{C}$.

(Se puede crear una versión de las álgebras de Clifford con coeficientes en cualquier campo.)

Usaremos variables $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ y ajustar la notación referente a funciones monogénicas,

$$\vec{\partial} = \partial_1\mathbf{i} + \partial_2\mathbf{j} + \partial_3\mathbf{k} \quad \text{operador de Dirac}$$

Ahora f es “monogénica” cuando $\vec{\partial}f = 0$.

(Algunos autores usan (x_0, x_1, x_2) y $\partial_0 + \partial_1\mathbf{e}_1 + \partial_2\mathbf{e}_2$. Las dos versiones son isomorfas.)

Lo importante es entender que aun cuando $\vec{f} = f_1\mathbf{e}_1 + f_2\mathbf{e}_2 + f_3\mathbf{e}_3$ es vector-valuada, la operación $\vec{\partial}\vec{f}$ puede tener una parte escalar no-cero.

Hay operadores integrales (“transmutaciones”) que convierten soluciones de una ecuación diferencial en soluciones de otra.

$$T_\lambda: \{f: \vec{\partial} f = 0\} \rightarrow \{g: (\vec{\partial} + \lambda)g = 0\}$$

Esto dice

$$f \text{ monogénica}, g = T_\lambda f, \Rightarrow \vec{\partial} g + \lambda g = 0.$$

($T_\lambda f$ es λ -metamonogénica)

Se pueden escribir explícitamente $2n + 3$ polinomios de cada grado n de forma que toda función monogénica es localmente una “serie de potencias” de estos polinomios con coeficientes cuaterniónicas.

Como conocemos todas las funciones monogénicas, “conocemos” todo $\ker(\vec{\partial} + \lambda)$: aplicar T_λ a los polinomios monogénicos básicos.

Ecuaciones de Maxwell

Para las ecuaciones de Maxwell, usamos dos valores de λ a saber, λ_+ , λ_- :

$$\lambda_{\pm} = \frac{\omega\sqrt{\epsilon\mu}}{\omega\beta\sqrt{\epsilon\mu} \pm 1}.$$

que corresponden a dos operadores T_{λ_+} , T_{λ_-} . Si f_+ y f_- son dos funciones monogénicas arbitrarias, entonces

Teorema

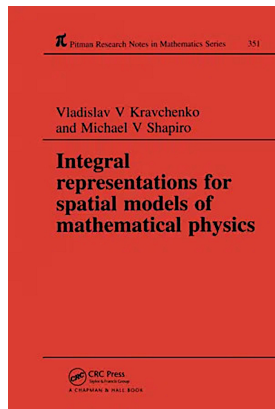
Los campos vectoriales complejos

$$\vec{E} = \frac{-1}{\sqrt{\mu}}(T_{\lambda_+}f_+ + T_{\lambda_-}f_-),$$

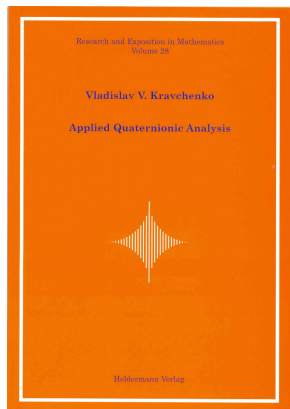
$$\vec{H} = \frac{-i}{\sqrt{\epsilon}}(T_{\lambda_+}f_+ - T_{\lambda_-}f_-),$$

son soluciones de las ecuaciones de Maxwell. Todas las soluciones son (límites de) combinaciones lineales de soluciones de esta forma.

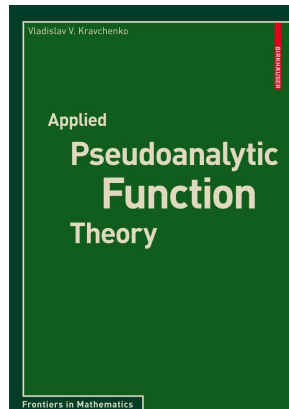
Ecuaciones de Maxwell



1996



2003



2009

Ecuaciones de Maxwell

- ▶ Campos de Beltrami
- ▶ Ecuaciones de Maxwell
 - ▶ Ecuaciones armónicas con el tiempo
 - ▶ Medio no-quiral inhomogéneo
- ▶ Ecuación de Dirac con potencial escalar o eléctrico
- ▶ Ecuaciones de Helmholtz
- ▶ Operador de Schrödinger escalar
- ▶ Ecuación de impedancia
- ▶ Ecuación de Vekua cuaterniónica, ecuación de conductividad

GRACIAS